

2002/2003

21

- 1 ④ Разложить в ряд Лорана по степеням $(z-i)$ функцию $f(z) = \frac{3z}{z^2 - 2iz + 8} + \frac{4i}{z^2 + 4}$ в кольце, которому принадлежит точка $z = 1$.

Шабунин, Сидоров стр. 70 – 75 (примеры 1, 2 стр. 73 – 75), Половинкин стр. 78 – 85 (пример 1 стр. 83 – 84)

- ① Дроби правильные.

Находим корни уравнения $z^2 - 2iz + 8 = 0$: $z_{1,2} = i \pm \sqrt{-1-8}$. Получаем два простых корня: $z_1 = 4i$ и $z_2 = -2i$.

Находим корни уравнения $z^2 + 4 = 0$. Получаем два простых корня: $z_3 = 2i$ и $z_4 = -2i$.

- ② Точки $z_1 = 4i$, $z_{2,4} = -2i$ и $z_3 = 2i$ являются особыми точками функции $f(z)$ (в них $f(z)$ не регулярна).

- ③ Разлагаем $f(z)$ на элементарные дроби:

$$\textcircled{1} \frac{3z}{z^2 - 2iz + 8} = \frac{3z}{(z-4i)(z+2i)} = \frac{A}{z-4i} + \frac{B}{z+2i} = \frac{A(z+2i) + B(z-4i)}{(z-4i)(z+2i)}$$

$$z^0: 2iA - 4iB = 0 \rightarrow A = 2B \quad \rightarrow \quad A = 2$$

$$z^1: A + B = 3 \quad \rightarrow \quad 3B = 3 \quad \rightarrow \quad B = 1 \quad \nearrow$$

$$\textcircled{2} \frac{4i}{z^2 + 4} = \frac{4i}{(z-2i)(z+2i)} = \frac{C}{z-2i} + \frac{D}{z+2i} = \frac{C(z+2i) + D(z-2i)}{(z-2i)(z+2i)}$$

$$z^0: 2iC - 2iD = 4i \rightarrow -4iD = 4i \rightarrow D = -1 \quad \searrow$$

$$z^1: C + D = 0 \rightarrow C = -D \quad \nearrow \quad \rightarrow \quad C = 1$$

$$f(z) = \frac{2}{z-4i} + \frac{1}{z+2i} + \frac{1}{z-2i} - \frac{1}{z+2i}, \text{ т.е. } \boxed{f(z) = \frac{2}{z-4i} + \frac{1}{z-2i}}.$$

- ④ Для удобства дальнейших выкладок произведем замену $z-i = w$ или $z = w+i$:

$$f(w) = \frac{2}{w-3i} + \frac{1}{w+3i} + \frac{1}{w-i} - \frac{1}{w+3i}, \quad \boxed{f(w) = \frac{2}{w-3i} + \frac{1}{w-i}}$$

Кольца аналитичности $f(w)$: $|w| < 1$,

$$1 < |w| < 3,$$

$$|w| > 3.$$

- ⑤ При $z = 1$ получаем $|w = 1-i|, |w| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$.

Т.о., раскладывая дроби в ряд Лорана по степеням w будем в кольце $1 < |w| < 3$, используя разложения в ряд Тейлора.

При этом $|i| < |w| < |3i|$.

$$\textcircled{1} \frac{2}{w-3i} = \frac{2}{-3i} \cdot \frac{1}{1 - \frac{w}{3i}} = \frac{2}{-3i} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{w}{3i}\right)^n = -2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(w)^n}{(3i)^{n+1}}.$$

$$\textcircled{2} \frac{1}{w-i} = \frac{1}{w} \cdot \frac{1}{1 - \frac{i}{w}} = \frac{1}{w} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{i}{w}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i)^n}{(w)^{n+1}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(i)^{k-1}}{(w)^k} = \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{w^n}{(i)^{n+1}}$$

Ответ: в кольце, которому принадлежит точка $z = 1$ ($1 < |z-i| < 3$) $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)(z-i)^n}{(3i)^{n+1}} + \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{(z-i)^n}{(i)^{n+1}}$