

4③ Применяя теорию вычетов вычислить интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(3-8x)}{4x^2-7x+5} dx$.

Шабунин, Сидоров стр. 140 – 145 (примеры 6 стр. 144), Половинкин стр. 103 – 108 (пример 3 стр. 107 – 108)

① Замечая, что $I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(3-8x)}{4x^2-7x+5} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(8x-3)}{4x^2-7x+5} dx$,

для решения задачи достаточно вычислить несобственный интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i(8x-3)}}{4x^2-7x+5} dx$

и воспользоваться формулой

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(8x-3)}{4x^2-7x+5} dx = \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i(8x-3)}}{4x^2-7x+5} dx. \quad (1)$$

② Для того чтобы применить теорему Коши¹ о вычетах², вводим функцию комплексной переменной

$$f(z) = \frac{e^{i8z}}{(4z^2-7z+5)e^{i3}}$$

и строим контур, состоящий из отрезка вещественной оси $[-R, R]$ и полуокружности $C_R = \{z : |z| = R, \operatorname{Im} z \geq 0\}$, выбрав R так, чтобы все особые точки z_k ($k = 1, 2, \dots, n$) функции $f(z)$, лежащие в верхней полуплоскости, оказались внутри контура. Тогда по теореме Коши о вычетах

$$\oint_{\Gamma} f(z) dz = \int_{-R}^R \frac{e^{i8x}}{(4x^2-7x+5)e^{i3}} dx + \int_{C_R} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{res} f(z). \quad (2)$$

③ Переходим к пределу при $R \rightarrow \infty$. Так как в нашем случае $\Phi(z) = \frac{1}{(4z^2-7z+5)e^{i3}}$ есть правильная рациональная дробь и $\alpha = 8 > 0$, то условия леммы Жордана³ выполнены и, следовательно, $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} f(z) dz = 0$.

Поскольку правая часть в (2) не зависит от R , имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i8x}}{(4x^2-7x+5)e^{i3}} dx = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{res} f(z), \quad (3)$$

где z_k - особые точки функции $f(z) = \frac{e^{i8z}}{(4z^2-7z+5)e^{i3}}$, лежащие в верхней полуплоскости.

¹ **Теорема (Коши о вычетах).** Пусть дана область $G \in \overline{\mathbb{C}}$ с кусочно-гладкой положительно ориентированной границей Γ . Пусть функция f определена и регулярна на G всюду, за исключением конечного числа изолированных особых точек $a_1, a_2, \dots, a_n \in G$ (при этом имеется в виду, что, если $\infty \in G$, то $\infty = a_n$) и пусть к тому же функция f непрерывно продолжима на границу области G . Тогда справедлива формула $\int_{\Gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{res}_{a_k} f$.

² **Определение.** Пусть изолированная особая точка $a \in \overline{\mathbb{C}}$ функции $f : \overset{\circ}{B}_{\rho}(a) \rightarrow \mathbb{C}$, $\rho > 0$. Пусть $\gamma_r \overset{\Delta}{=} \{z : |z-a| = r\}$ - положительно ориентированная окружность, причем $0 < r < \rho$. Тогда вычетом функции f в точке a называется число $\operatorname{res}_a f = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_r} f(z) dz$.

³ **Лемма (Жордан).** Пусть $\Phi(z)$ - непрерывная функция на замкнутом множестве $\{z | \operatorname{Im} z \geq 0, |z| = R_0 > 0\}$. Пусть число $\alpha > 0$ и $C_R \overset{\Delta}{=} \{z | |z| = R, \operatorname{Im} z \geq 0\}$, $R > R_0$ - семейство полуокружностей в верхней полуплоскости. Обозначим $\varepsilon(R) \overset{\Delta}{=} \max \{|\Phi(z)| : z \in C_R\}$ при $R > R_0$. Если $\lim_{R \rightarrow \infty} \varepsilon(R) = 0$, то $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} e^{i\alpha z} \Phi(z) dz = 0$.

- ④ Находим особые точки функции $f(z) = \frac{e^{i8z}}{(4z^2 - 7z + 5)e^{i3}}$ как нули (1-го порядка) ее знаменателя: $z = \frac{7+i\sqrt{31}}{8}$ и $z = \frac{7-i\sqrt{31}}{8}$. Таким образом, точки $z = \frac{7+i\sqrt{31}}{8}$ и $z = \frac{7-i\sqrt{31}}{8}$ — полюса⁵ 1-го порядка (ПП — простые полюса).

- ⑤ Вычисляем вычет в простом полюсе $z = \frac{7+i\sqrt{31}}{8}$ по формуле $\operatorname{res}_{z=\frac{7+i\sqrt{31}}{8}} f(z) = \lim_{z \rightarrow \frac{7+i\sqrt{31}}{8}} \left(z - \frac{7+i\sqrt{31}}{8} \right) f(z)$. Получаем

$$\operatorname{res}_{z=\frac{7+i\sqrt{31}}{8}} f(z) = \frac{e^{i8z}}{4 \left(z - \frac{7-i\sqrt{31}}{8} \right) e^{i3}} \Bigg|_{z=\frac{7+i\sqrt{31}}{8}} = \frac{e^{i7-\sqrt{31}}}{4 \left(2 \frac{i\sqrt{31}}{8} \right) e^{i3}} = \frac{-ie^{i4}}{\sqrt{31}e^{\sqrt{31}}}$$

- ⑥ Вычисляем несобственный интеграл по формуле (3):

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i8x}}{(4x^2 - 7x + 5)e^{i3}} dx = 2\pi i \operatorname{res}_{z=\frac{7+i\sqrt{31}}{8}} f(z) = \frac{2\pi e^{i4}}{\sqrt{31}e^{\sqrt{31}}} = \frac{2\pi(\cos 4 + i \sin 4)}{\sqrt{31}e^{\sqrt{31}}}.$$

- ⑦ Используя формулу (1), находим искомый интеграл:

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(3-8x)}{4x^2 - 7x + 5} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(8x-3)}{4x^2 - 7x + 5} dx = \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i(8x-3)}}{4x^2 - 7x + 5} dx = \operatorname{Re} \frac{2\pi(\cos 4 + i \sin 4)}{\sqrt{31}e^{\sqrt{31}}} = \frac{2\pi \cos 4}{\sqrt{31}e^{\sqrt{31}}}$$

Ответ: $\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(3-8x)}{4x^2 - 7x + 5} dx = \frac{2\pi \cos 4}{\sqrt{31}e^{\sqrt{31}}}}$

⁴ $4z^2 - 7z + 5 = 0$, $z_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 4 \cdot 5 \cdot 4}}{2 \cdot 4} = \frac{7 \pm i\sqrt{31}}{8}$

⁵ **Определение.** Изолированная особая точка $a \in \overline{\mathbb{C}}$ функции $f: \overset{\circ}{B}_\rho(a) \rightarrow \mathbb{C}$ называется **полюсом**, если существует предел $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = \infty$.