

## ЛЕКЦИЯ 16

## Конформные отображения

Рассмотрим примеры конформных отображений, которые задаются элементарными функциями.

**16.1. Общая степенная функция.**

Рассмотрим в области  $G = \mathbb{C} \setminus [0; +\infty)$  функцию

$$f(z) = z^t = e^{t \cdot h(z)}, \quad t \in \mathbb{R}, t > 0,$$

где  $h(z)$  — некоторая регулярная ветвь  $\text{Ln}(z)$  в области  $G$ . В этой области можно выделить ветви  $\text{Ln}(z)$ , потому что нет замкнутых контуров, охватывающих 0, тогда

$$f(z) = |z|^t \cdot e^{it \cdot \arg_{\text{гл}} z}, \quad \text{если } h(z) = \ln |z| + i \arg_{\text{гл}} z \quad \forall z \in G.$$

Определим, в каких подобластях  $\tilde{G} \subset G$  функция  $f$  осуществляет конформное отображение.

1) Проверяем производную на равенство 0:

$$(z^t)' = (e^{t \cdot h(z)})' = e^{t \cdot h(z)} \cdot t \cdot \frac{1}{z} = \frac{z^t \cdot t}{z} \neq 0, \quad \text{если } z \neq 0,$$

т. е. в каждой точке  $G$  функция  $f$  конформна.

2) Проверяем взаимную однозначность:

Если  $z_1, z_2 \in G, z_1 \neq z_2$ , когда  $z_1^t = z_2^t$ ?

$$z_1^t = z_2^t \Leftrightarrow |z_1|^t e^{it \arg_{\text{гл}} z_1} = |z_2|^t e^{it \arg_{\text{гл}} z_2} \Leftrightarrow \begin{cases} |z_1|^t = |z_2|^t \\ \arg_{\text{гл}} z_2 = \arg_{\text{гл}} z_1 + \frac{2\pi k}{t}, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Если пользоваться функцией как конформным отображением, то нужно выбрать подобласть области  $G$ , на которой нет “склеивающихся” точек, заданных системой, приведенной выше, т. е.  $f$  конформна в  $\tilde{G} \subset G \Leftrightarrow$  в  $\tilde{G}$  нет точек  $z_1, z_2$ :

$$|z_1| = |z_2|, \quad \arg_{\text{гл}} z_2 = \arg_{\text{гл}} z_1 + \frac{2\pi k}{t}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

**Примеры** (канонические области конформности функции  $z^t$ ):

**Пример 16.1.**

$$G_0 = \{z = r \cdot e^{i\varphi} \mid r > 0, 0 < \varphi < \varphi_0\}, \quad G_0 \text{ — открытый сектор.}$$

Ищется образ  $f(G_0)$  — “область значений”. Работать проще в полярных координатах: выбираются лучи, соответствующие углу  $\alpha$  в рамках  $0 < \alpha < \varphi_0$ . Рассмотрим лучи:

$$l_\alpha = \{r \cdot e^{i\alpha} \mid r > 0, 0 < \alpha < \varphi_0\} \xrightarrow{z^t} \{r^t \cdot e^{ti\alpha} \mid r > 0, 0 < \alpha < \varphi_0\}.$$

Так как  $r$  “пробегаёт” всю положительную ось, то  $r^t$  тоже “пробегаёт” всю положительную ось, угол же меняется. Следовательно, луч под углом  $\alpha$  переходит в луч под

## Лекция 16. Конформные отображения

углом  $t\alpha$ , и образы будут заметать весь сектор от 0 до  $t\varphi_0$ :  $f(G_0)$  — открытый сектор с углом  $t\varphi_0$ .

Важно, чтобы выполнялось условие  $t\varphi_0 \leq 2\pi$ , иначе нарушится взаимная однозначность и получится “перехлестывающийся” сектор.

При выбранных ограничениях обратное отображение тоже будет конформным:

- 1) Производная в точке  $\neq 0$  (теорема об обратной функции: если исходная функция регулярна и ее производная отлична от 0, то обратная тоже регулярна, и ее производная  $\neq 0 = \frac{1}{f'(z)}$ ).

- 2) Функция взаимнооднозначная.

Обратное отображение для  $f(z) = z^t$ :

$$z = f^{-1}(w) = w^{\frac{1}{t}}.$$

Из определения конформности в области (лекция 15) видно, что если  $f$  конформно отображает  $G_0$  на  $\tilde{G}_0$ , то  $\exists$  отображение  $f^{-1}$ , которое конформно отображает  $\tilde{G}_0$  на  $G_0$ .

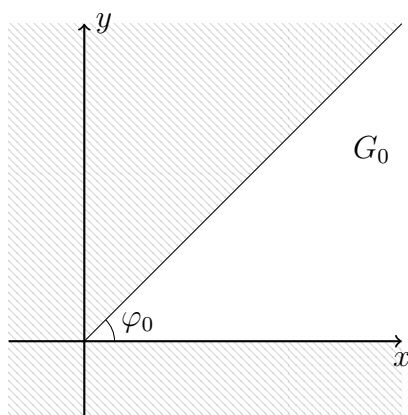


Рис. 16.1.

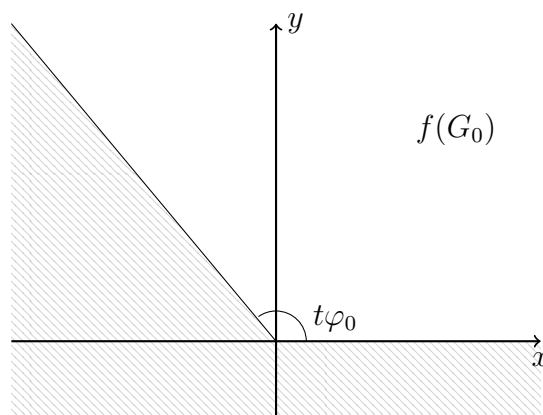


Рис. 16.2.

**Пример 16.2.**

$$\varphi_0 = \pi, \quad w = f(z) = z^2, \quad t = 2, \quad t\varphi_0 = 2\pi.$$

Из-за того, что сектор открытый, граница не отображается. Обратное преобразование:

$$z = \sqrt{|w|} e^{\frac{i \arg w}{2}}.$$

Дополнение к примеру 16.1. Представим уже рассмотренный сектор не как объединение лучей, а как объединение дуг с центром в точке 0, и вычислим их образы:

$$C_\beta = \{\beta \cdot e^{i\varphi} \mid 0 < \varphi < \varphi_0, \beta > 0\} \xrightarrow{z^t} \{\beta^t \cdot e^{it\varphi} \mid 0 < t\varphi < t\varphi_0, \beta > 0\}.$$

Снова получается открытый сектор с раствором  $t\varphi_0$ .

Кривые второго порядка можно сводить к уже рассмотренным примерам.

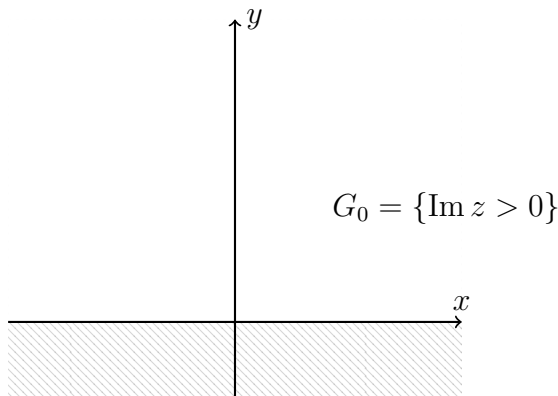


Рис. 16.3.

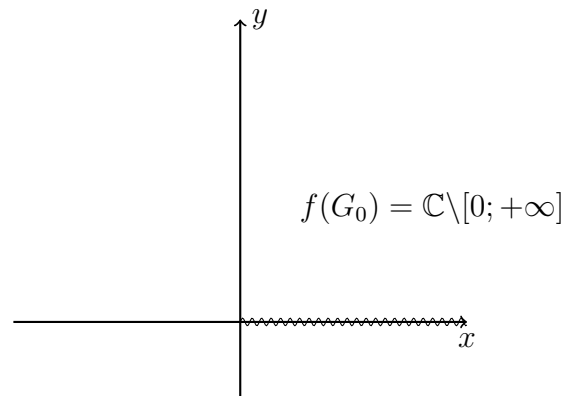


Рис. 16.4.

**Пример 16.3.** Принцип сохранения области: при отображении регулярной неконстантной функции область переходит в область.

Считаем образ прямой  $y = a$ . Иногда вычисления легче проводить в полярных, иногда в декартовых координатах. В данном случае — в декартовых.

$$\{x + ia \mid x \in \mathbb{R}\} \xrightarrow{z^2} \{(x + ia)^2 \mid x \in \mathbb{R}\} \rightarrow \{x^2 - a^2 + 2iax = f(z) = u + iv \mid x \in \mathbb{R}\} \rightarrow$$

$$\begin{cases} u(x) = x^2 - a^2 \\ v(x) = 2ax \end{cases} \quad \text{— параметрическое уравнение кривой.}$$

Исключаем  $x$ , получаем параболу:

$$u = \frac{v^2}{4a^2} - a^2 \quad \text{— образ границы искомой области в } \mathbb{C} \setminus [0; +\infty).$$

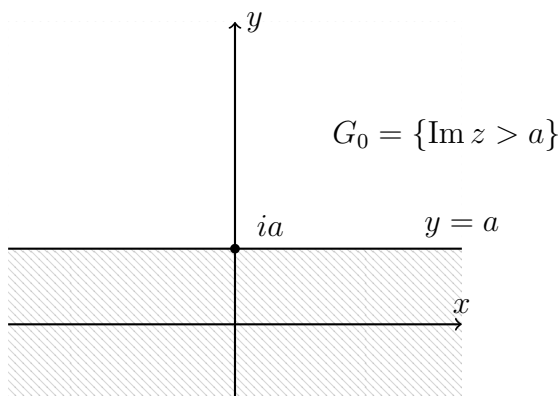


Рис. 16.5.

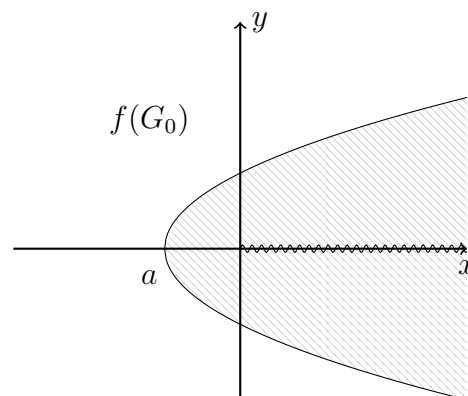


Рис. 16.6.

Чтобы понять, куда перешла сама область  $\{\operatorname{Im} z > a\}$ , достаточно посчитать образ точки из этой области:

$$f(2ia) = -4a^2.$$

В какую область (“внутреннюю” или “внешнюю”) относительно параболы в  $\mathbb{C} \setminus [0; +\infty)$  перешла эта точка, туда перешла и вся искомая область. Таким образом,  $f(G_0)$  —

“внешняя часть” параболы. Заптрихованная же область “заметается” параболлами, полученными как образы прямых, параллельных оси  $x$  из области  $\{0 < \operatorname{Im} z < a\}$ .

Обратное преобразование возможно: из области, ограниченной параболой, можно получить более простую область.

## 16.2. Экспонента

Определим, в каких областях функция  $f(z) = e^z$  осуществляет конформное отображение.

Проверяем:

1) Производная должна быть отлична от 0:

$$f'(z) = e^z \neq 0 \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

2) Если  $z_1 \neq z_2$ , когда  $e^{z_1} = e^{z_2}$ ?

$$e^{x_1} \cdot e^{iy_1} = e^{x_2} \cdot e^{iy_2} \Leftrightarrow \begin{cases} e^{x_1} = e^{x_2} \\ y_2 = y_1 + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Следовательно, в области не должно быть точек  $z_2 = z_1 + 2\pi ki, \quad k \in \mathbb{Z}$

**Пример 16.4.** Одна из областей, в которых полученное условие не нарушается, — горизонтальная полоса ширины  $2\pi i$ .

$$G_0 = \{x + iy \mid x \in \mathbb{R}, y \in (0; 2\pi)\}, \quad w = f(z) = e^z.$$

Рассмотрим горизонтальные прямые:

$$l_a = \{x + ia \mid x \in \mathbb{R}\} \xrightarrow{e^z} \{e^x \cdot e^{ia} \mid x \in \mathbb{R}\}, \quad \text{где } 0 < a < 2\pi.$$

$x \in \mathbb{R} \Rightarrow e^x \in (0; +\infty) \Rightarrow$  образы горизонтальных прямых есть лучи под углом  $a$  к оси  $OX$ , а  $f(G_0) = \mathbb{C} \setminus [0; +\infty]$ , т. к.  $0 < a < 2\pi$ .

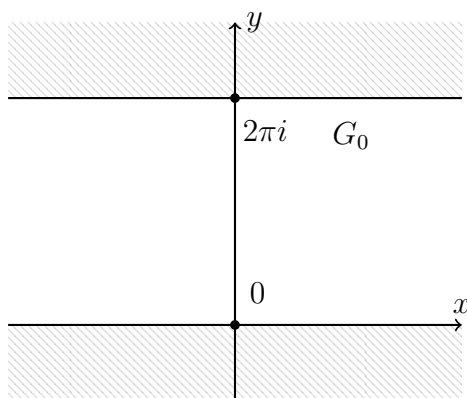


Рис. 16.7.

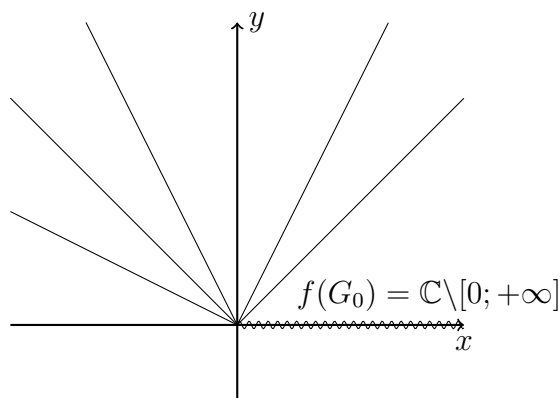


Рис. 16.8.

Теперь представим область  $G_0$  не как объединение горизонтальных прямых, а как объединение вертикальных отрезков следующего вида:

$$I_b = \{b + iy \mid y \in (0; 2\pi), b \in \mathbb{R}\} \xrightarrow{e^z} \{e^b \cdot e^{iy} \mid 0 < y < 2\pi, b \in \mathbb{R}\}.$$

Образ получается как объединение окружностей радиуса  $e^b$  без одной точки, лежащей на положительной полуоси  $OX$ .

Обратное отображение:

$$z = f^{-1}(w) = \ln |w| + i \arg_{\text{гл}} w.$$

**Пример 16.5.** Если представить рассматриваемую область как объединение горизонтальных прямых, то аналогично предыдущему примеру при отображении получатся все возможные лучи, но только теперь углы образов меняются от 0 до  $\pi$ , и образом всей области будет верхняя полуплоскость.

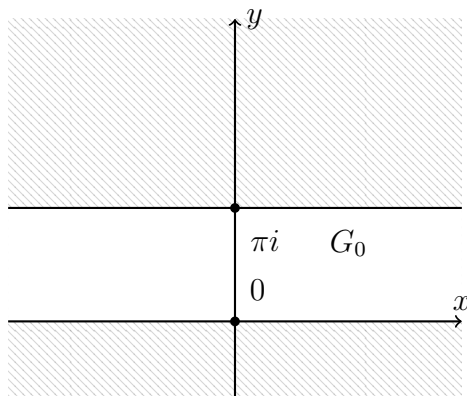


Рис. 16.9.

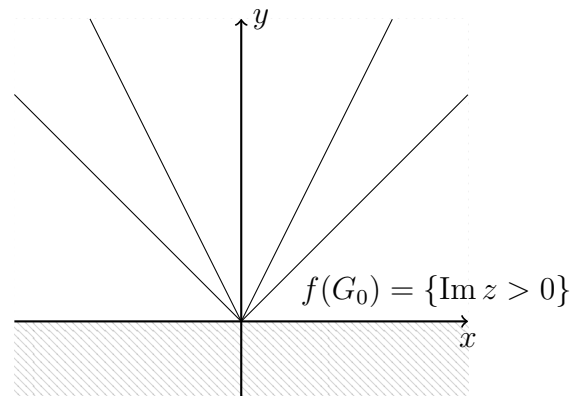


Рис. 16.10.

**Пример 16.6.** У рассматриваемой области отсутствует левая часть полосы  $\rightarrow$  у образа будет только часть верхней полуплоскости.

Когда  $x \in (-\infty; 0)$ ,  $e^x \in (0; 1) \Rightarrow$  у лучей будет отсутствовать начальная единичная часть  $\Rightarrow$  в образе будет отсутствовать единичный полукруг.

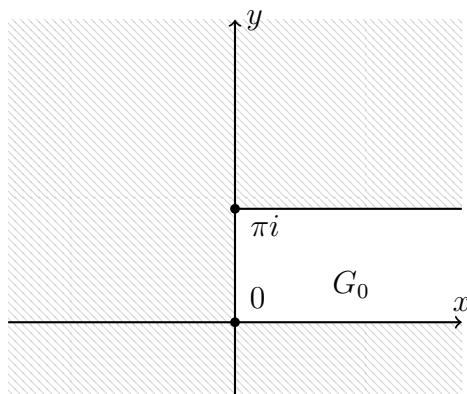


Рис. 16.11.

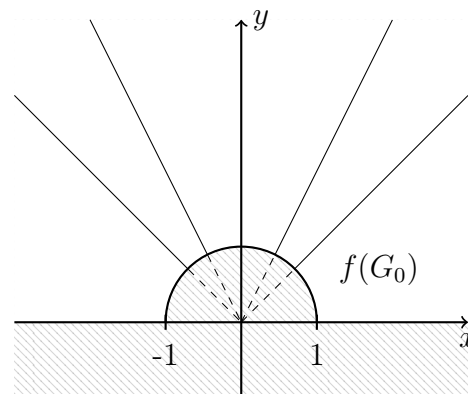


Рис. 16.12.

**Пример 16.7.** Наоборот, когда  $x \in (0; +\infty)$ ,  $e^x \in (1; +\infty) \Rightarrow$  у лучей будет присутствовать только начальная единичная часть  $\Rightarrow$  образ - верхняя часть единичного круга.

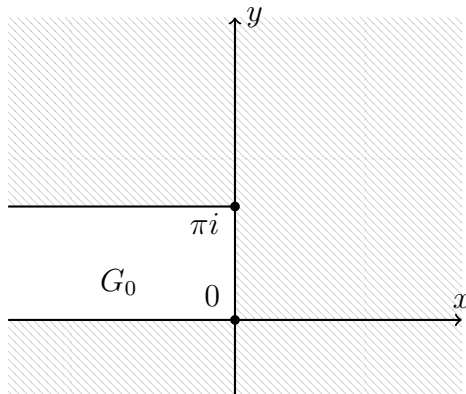


Рис. 16.13.

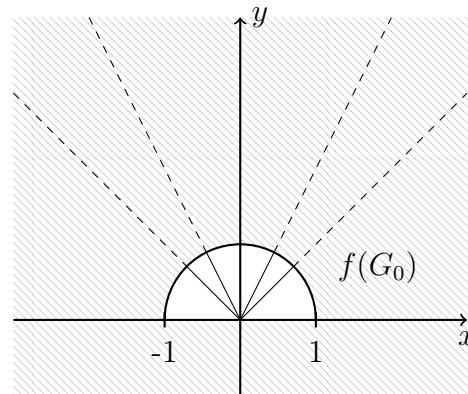


Рис. 16.14.

### 16.3. Функция Жуковского

Определим, в каких областях функция  $f(z) = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})$  осуществляет конформное отображение.

Проверяем:

- 1) У функции  $f(z)$  существует две особые точки - 0 и  $\infty$ , их рассмотрим отдельно.

$$f'(z) = \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{z^2}) = 0 \quad \text{при } z = \pm 1 \text{ — точки нарушения конформности.}$$

Исследуем конформность в 0 (полюсе 1 порядка):

Рассмотрим

$$g(z) = \frac{1}{f(z)} = \frac{2z}{z^2 + 1}$$

Если эта функция конформна в 0, то и исходная функция тоже конформна в 0:

$$g'(z) = \frac{2(z^2 + 1) - 2z \cdot 2z}{(z^2 + 1)^2} \Big|_{z=0} = 2$$

$\Rightarrow g$  — конформна в 0  $\Rightarrow f$  конформна в 0.

Исследуем конформность в точке  $\infty$ :

Рассмотрим функцию

$$h(z) = f\left(\frac{1}{z}\right) = f(z)$$

и исследуем ее конформность в точке 0.

Выше показано, что  $h(z) = f$  конформна в точке 0  $\Rightarrow f$  конформна в точке  $\infty \Rightarrow f$  конформна в каждой точке из  $\mathbb{C} \setminus \{\pm 1\}$ .

- 2) Проверяем взаимную однозначность  $f$ :

Если  $z_1 \neq z_2$ , когда  $f(z_1) = f(z_2)$ ?

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\left(z_1 + \frac{1}{z_1}\right) &= \frac{1}{2}\left(z_2 + \frac{1}{z_2}\right) \\ z_1 - z_2 &= \frac{1}{z_2} - \frac{1}{z_1} \end{aligned}$$

$$z_1 - z_2 = \frac{z_1 - z_2}{z_1 z_2}$$

$$z_1 - z_2 \neq 0 \Rightarrow z_2 = \frac{1}{z_1}$$

Обсудим расположение точек  $z$  и  $\frac{1}{z}$ :

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z \cdot \bar{z}} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}.$$

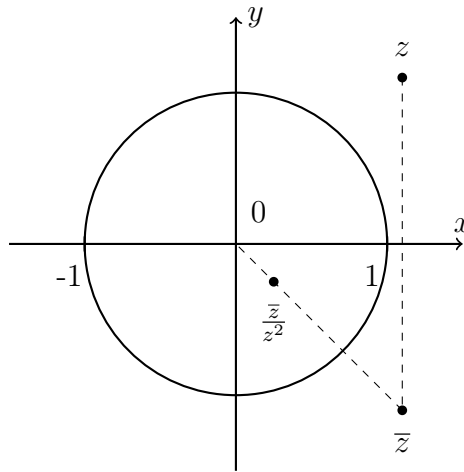


Рис. 16.15.

Значит, для того, чтобы получить из точки  $z$  точку  $\frac{1}{z}$  или  $\frac{\bar{z}}{|z|^2}$ , нужно данную точку отразить относительно оси  $OX$ , а затем — относительно единичной окружности.

Напоминание: точки симметричны относительно единичной окружности  $\Leftrightarrow$

1)

$$\arg_{\text{гл}} \bar{z} = \arg_{\text{гл}} \frac{\bar{z}}{|z|^2}$$

2)

$$\left| \frac{\bar{z}}{|z|^2} \right| \cdot |\bar{z}| = \frac{|z|^2}{|z|^2} = 1$$

Итог: отображение  $f(z) = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})$  конформно в любой области, не содержащей точек  $\pm 1$  и точек, связанных соотношением  $z_2 = \frac{1}{z_1}$ .

**Простые примеры областей конформности  $f$**

$\{|z| < 1\}$ ,  $\{|z| > 1\}$ ,  $\{\text{Im } z > 0\}$ ,  $\{\text{Im } z < 0\}$

Ищем образы этих областей при отображении функцией Жуковского. План — посчитать образы лучей и окружностей.

$$w = f(z) = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z}) = \frac{1}{2}(r \cdot e^{i\varphi} + \frac{e^{-i\varphi}}{r}) = \frac{1}{2}[r(\cos \varphi + i \sin \varphi) + \frac{1}{r}(\cos \varphi - i \sin \varphi)]$$

Собираем отдельно мнимую и действительную части:

$$\begin{cases} u(r; \varphi) = \cos \varphi (\frac{1}{2}(r + \frac{1}{r})) \\ v(r; \varphi) = \sin \varphi (\frac{1}{2}(r - \frac{1}{r})) \end{cases}$$

Отобразим окружности  $C_{r_0}$ , радиус  $r_0 > 0$  фиксирован, для нахождения образов областей  $\{|z| < 1\}, \{|z| > 1\}$ .

Обозначим

$$a = \frac{1}{2}(r_0 + \frac{1}{r_0}) > 0, \quad b = |\frac{1}{2}(r_0 - \frac{1}{r_0})| > 0, \quad r_0 \neq 1, \quad r_0 > 0.$$

Тогда рассмотрим:

$$\frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} = \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1 \text{ — уравнение эллипса.}$$

$$c^2 = a^2 - b^2 = \frac{1}{4}(r_0^2 + 2 + \frac{1}{r_0^2}) - \frac{1}{4}(r_0^2 - 2 + \frac{1}{r_0^2}) = 1$$

Образами окружностей являются эллипсы с фокусами в точках  $\pm 1$ .

Отдельно посчитаем образ единичной окружности,  $r_0 = 1$ , этот образ не будет входить в образ конформных областей, т. к. единичная окружность не входит в области конформности  $\{|z| < 1\}, \{|z| > 1\}$ , а является их границей:

$$\begin{cases} u = \cos \varphi \\ v = 0 \end{cases} \quad \text{— отрезок } [-1; 1].$$

Заметим, что при увеличении радиусов окружностей эллипсы “распрямляются”, а при уменьшении — “схлопываются” в отрезок  $[-1; 1]$ .

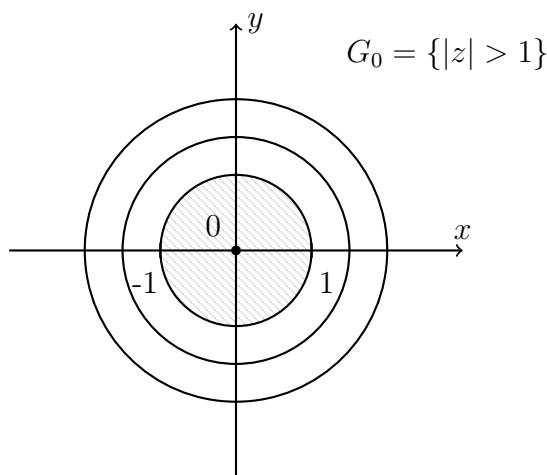


Рис. 16.16.

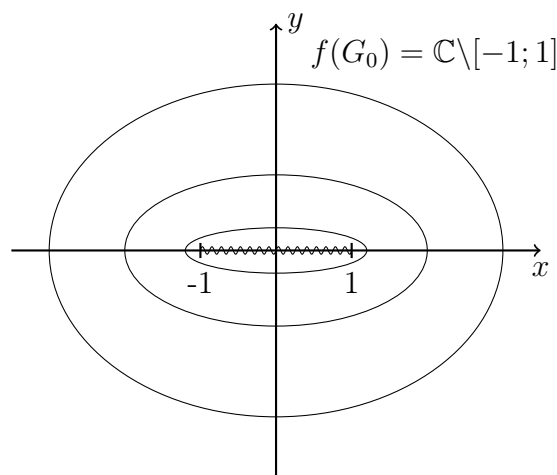


Рис. 16.17.

Так как окружности радиуса  $r_0$  и  $\frac{1}{r_0}$  переходят в один и тот же эллипс (формулы симметричны относительно замены  $r_0$  на  $\frac{1}{r_0}$ ), то образы для  $\{|z| < 1\}, \{|z| > 1\}$  одинаковы. Именно поэтому нельзя отображать одновременно обе эти области, иначе нарушится взаимная однозначность.

Таким образом,  $f(\{|z| < 1\}) = \mathbb{C} \setminus [-1; 1] = f(\{|z| > 1\})$ .



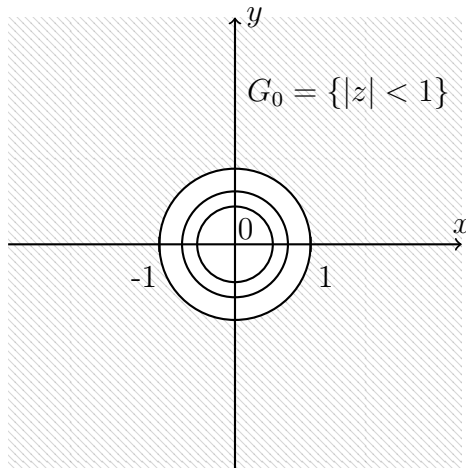


Рис. 16.18.

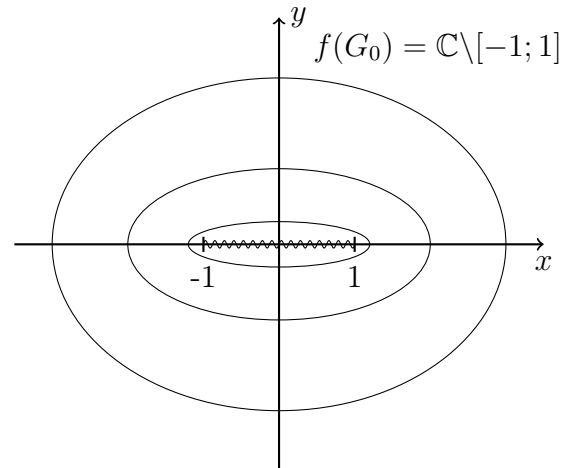


Рис. 16.19.

Обратная функция:

$$w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$$

$$2z \cdot w = z^2 + 1$$

$$z^2 - 2wz + 1 = 0$$

$$D = 4w^2 - 4$$

“ $z_{1,2} = w \pm \sqrt{w^2 - 1}$ ” — “по-школьному”

$z = f^{-1}(z) = w + g_0(w)$  или  $z = w + g_1(w)$ , где  $g_0, g_1$  — регулярные ветви  $\sqrt{w^2 - 1}$  в  $\mathbb{C} \setminus [-1; 1]$ .

Для задания ветви достаточно задать значение в одной точке. Рассмотрим точку  $i$ . Если необходимо, чтобы обратное преобразование отображало из  $\mathbb{C} \setminus [-1; 1]$  в  $\{|z| > 1\}$ , то нужно выбрать соответствующую регулярную ветвь:

$$z = f^{-1} = w + g_0(w), \quad \text{где } g_0(i) = i\sqrt{2}, \quad \text{тогда } z = i(1 + \sqrt{2}), |z| > 1.$$

Аналогично можно получить ветвь для обратного преобразования из  $\mathbb{C} \setminus [-1; 1]$  в  $\{|z| < 1\}$ :

$$z = f^{-1} = w + g_1(w), \quad \text{где } g_1(i) = -i\sqrt{2}, \quad \text{тогда } z = i(1 - \sqrt{2}), |z| < 1.$$

Отобразим лучи  $l_{\varphi_0}$ , угол  $\varphi_0 \in [0; 2\pi)$  фиксирован, для нахождения образов областей  $\{\operatorname{Im} z > 0\}$ ,  $\{\operatorname{Im} z < 0\}$ .

Обозначим

$$\tilde{c} = |\cos \varphi_0| \neq 0, \quad \varphi_0 \neq \pi/2 + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\tilde{d} = |\sin \varphi_0| \neq 0, \quad \varphi_0 \neq \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Для заданных условий получается следующее выражение:

$$\frac{u^2}{\tilde{c}^2} - \frac{v^2}{\tilde{d}^2} = 1 \quad \text{— уравнение гиперболы с фокусами } \pm 1 \quad (c^2 = \tilde{c}^2 + \tilde{d}^2 = 1).$$

Рассмотрим ситуацию, когда  $\varphi_0 = 0$  (посмотрим, куда отображается часть границы областей  $\{\operatorname{Im} z > 0\}$ ,  $\{\operatorname{Im} z < 0\}$ ):

$$\begin{cases} u = \frac{1}{2}(r + \frac{1}{r}) \in [1; +\infty] \\ v = 0 \end{cases}$$

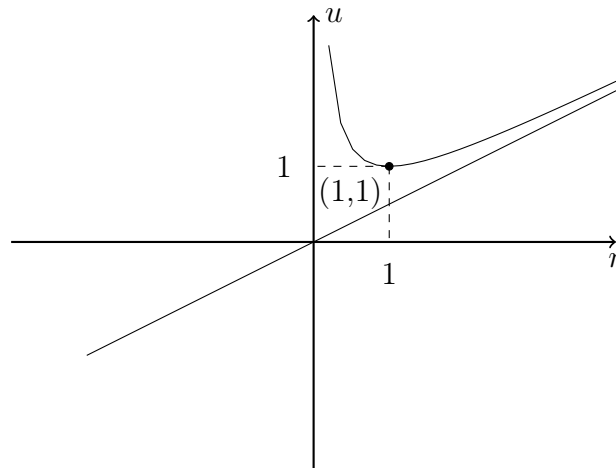


Рис. 16.20.

Теперь рассмотрим ситуацию, когда  $\varphi_0 = \pi$  (куда отображается другая часть границы областей  $\{\operatorname{Im} z > 0\}$ ,  $\{\operatorname{Im} z < 0\}$ ):

$$\begin{cases} u = -\frac{1}{2}(r + \frac{1}{r}) \in [-\infty; -1] \\ v = 0 \end{cases}$$

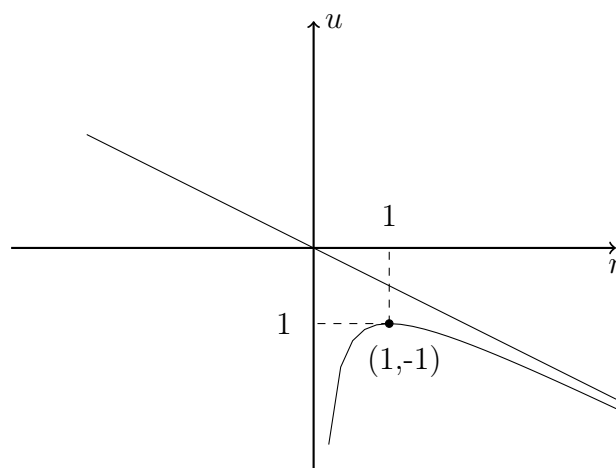


Рис. 16.21.

Итак, каждый луч из  $\{\operatorname{Im} z > 0\}$  (за исключением тех, что находятся по углам  $0$ ,  $\frac{\pi}{2}$  и  $\pi$ ) переходит в гиперболу. Лучи из правой четверти переходят в правые ветви

гиперболы, и чем меньше угол, тем сильнее “прижата” гипербола к оси  $OX$ . При  $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$  гипербола вырождается в прямую - ось  $OY$ :

$$\begin{cases} u = 0 \\ v = \frac{1}{2}(r - \frac{1}{r}) \in \mathbb{R} \end{cases}$$

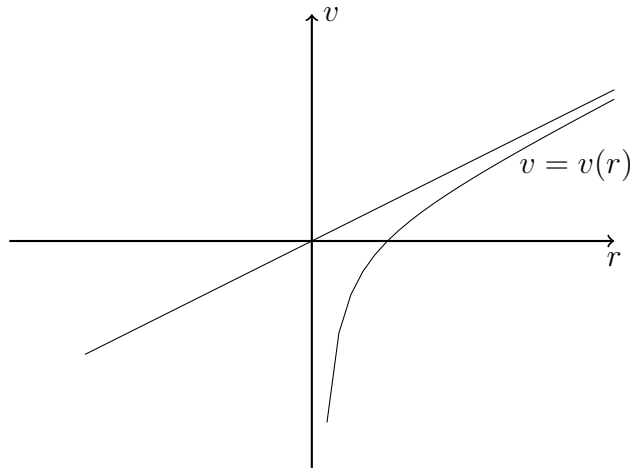


Рис. 16.22.

Лучи из левой четверти аналогичным образом переходят в левые ветви гиперболы. Таким образом,  $f(\{\operatorname{Im} z > 0\}) = \mathbb{C} \setminus (-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$ .

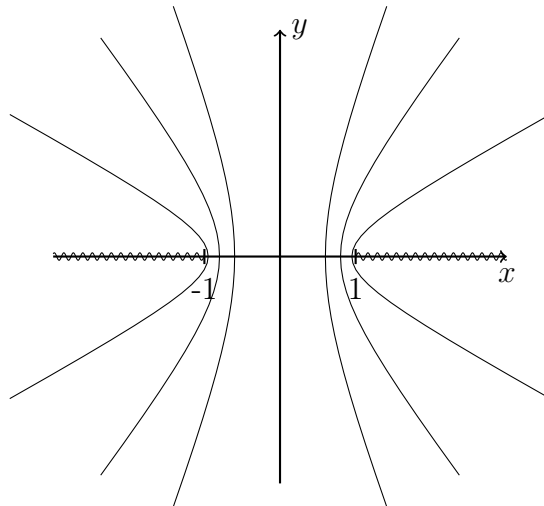


Рис. 16.23.

$l_{\varphi_0}, l_{-\varphi_0}$  отобразятся в одну и ту же гиперболу, изменится только направление обхода  $\Rightarrow f(\{\operatorname{Im} z < 0\}) = \mathbb{C} \setminus (-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$ .

**Пример 16.8.** Верхние полуокружности, чей радиус  $> 1$ , переходят в верхние полуэллипсы — образом будет верхняя полуплоскость  $\{\operatorname{Im} z > 0\}$ .

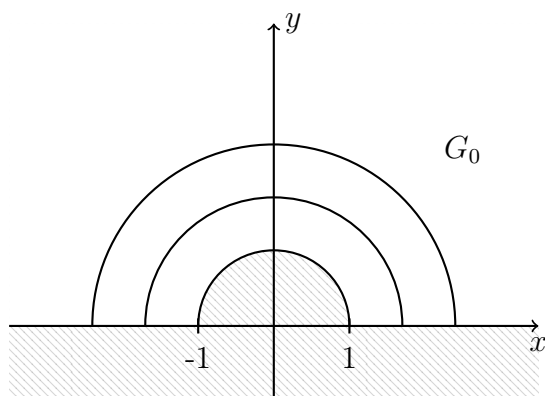


Рис. 16.24.

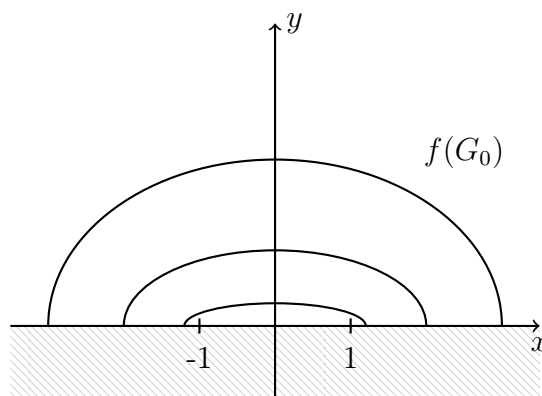


Рис. 16.25.

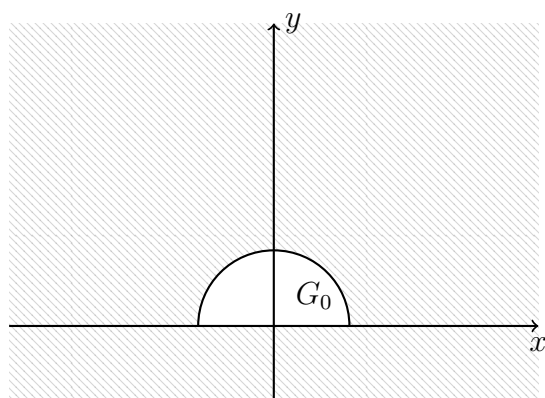


Рис. 16.26.

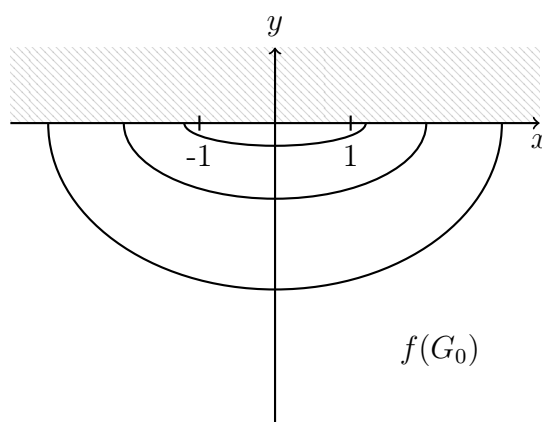


Рис. 16.27.

**Пример 16.9.** Верхние полуокружности, чей радиус  $< 1$ , отображаются в нижние полуэллипсы, т. к. меняется ориентация,  $\varphi \rightarrow -\varphi$  — образом будет нижняя полуплоскость  $\{\operatorname{Im} z < 0\}$ .

**Теорема 16.1.** Теорема Римана (б/д).

Пусть  $G$  — односвязная область в  $\overline{\mathbb{C}}$ , граница которой содержит более одной точки (область  $\mathbb{C}$  с границей  $\infty$  не подойдет). Тогда  $\exists$  функция  $f$ , осуществляющая конформное отображение  $G$  на единичный круг  $\{|w| < 1\}$ .

Причем, если произвольно выбрать

$$z_0 \in G, \quad w_0 \in \{|w| < 1\}, \quad \alpha \in [0; 2\pi),$$

то  $\exists!$  конформное отображение  $f: G \rightarrow \{|w| < 1\}$  такое, что

$$f(z_0) = w_0, \quad \arg_{\text{гл}} f'(z_0) = \alpha.$$

**Следствие 16.1.** Если  $G, \tilde{G}$  — односвязные области в  $\mathbb{C}$ , граница каждой из них состоит более, чем из 1 точки, то найдется конформное отображение  $G$  на  $\tilde{G}$ .

□ Пусть  $G \xrightarrow{f} \{|w| < 1\}$ ,  $\tilde{G} \xrightarrow{\tilde{f}} \{|w| < 1\}$ . По теореме Римана  $f, \tilde{f}$  конформны  $\Rightarrow \tilde{f}^{-1}(f)$  конформно отображает  $G$  на  $\tilde{G}$ .

Следствие 16.1 доказано. ■

**Следствие 16.2.** Любое конформное отображение  $\{|z| < 1\}$  на  $\{|w| < 1\}$  (т. е. единичного круга на себя) имеет вид:

$$f(z) = e^{i\alpha} \frac{z - z_0}{1 - \overline{z_0} \cdot z}, \quad \text{где } \alpha \in [0; 2\pi), z_0 \in \{|z| < 1\}.$$

□ Используем теорему Римана.

Пусть  $g$  — какое-то конформное отображение  $\{|z| < 1\}$  на  $\{|w| < 1\}$ . Тогда

$$\exists! z_0 \in \{|z| < 1\} : g(z_0) = 0.$$

Положим

$$\alpha \stackrel{\text{опр}}{=} \arg_{\text{гл}} g'(z_0).$$

Тогда дробно-линейная функция вида

$$f(z) = e^{i\alpha} \frac{z - z_0}{1 - \overline{z_0} \cdot z}$$

тоже отображает  $\{|z| < 1\}$  на  $\{|w| < 1\}$  (доказано в лекции 15) и удовлетворяет тем же условиям нормировки, т. к.:

$$f'(z) = e^{i\alpha} \frac{(1 - \overline{z_0} \cdot z) - (z - z_0) \cdot (-\overline{z_0})}{(1 - \overline{z_0} \cdot z)^2} \Big|_{z=z_0} = e^{i\alpha} \frac{1 - \overline{z_0} \cdot z}{(1 - \overline{z_0} \cdot z)^2} = \frac{e^{i\alpha}}{1 - \overline{z_0} \cdot z} = \frac{e^{i\alpha}}{1 - |z_0|^2}.$$

Т. к.  $\frac{1}{1 - |z_0|^2} > 0 \Rightarrow \arg_{\text{гл}} f'(z_0) = \alpha \Rightarrow f$  и  $g$  удовлетворяют одинаковым условиям из теоремы Римана  $\Rightarrow f = g$ .

Следствие 16.2 доказано. ■

Аналогично доказывается, что все конформные отображения  $\{\text{Im } z > 0\}$  на  $\{|w| < 1\}$  имеют вид:

$$f(z) = e^{i\alpha} \frac{z - z_0}{z - \overline{z_0}}, \quad \alpha \in [0; 2\pi), \text{Im } z_0 > 0.$$

**Пример 16.10.**  $\mathbb{C}$  нельзя конформно отобразить на  $\{|w| < 1\}$ . Границей  $\mathbb{C}$  в  $\overline{\mathbb{C}}$  является  $\infty$ .

Если есть отображение  $f : \mathbb{C} \rightarrow \{|w| < 1\}$ , то  $f$  — целая, причем  $|f| < 1$ , и по теореме Лиувилля  $f \equiv \text{const}$ , что невозможно.

**Пример 16.11.** Нельзя отобразить  $\overline{\mathbb{C}}$  на  $\mathbb{C}$  конформно.

Предположим, что можно:  $f : \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{C}$ . Тогда  $f$  — целая, причем  $\infty$  — устранимая точка  $\Rightarrow f \equiv \text{const}$ .

**Пример 16.12.**  $\mathbb{C} \setminus [-1; 1]$  односвязна в  $\overline{\mathbb{C}}$ , кривая, лежащая в этой области, стягивается через бесконечность (нужно представить сферу Римана).