

## ЛЕКЦИЯ 2

## Квантовая физика

Для фотона справедливы следующие формулы:

$$E = \hbar\omega, \quad \vec{p} = \hbar\vec{k}.$$

Но мы знаем, что в зависимости от того, какой эксперимент мы проводим, свет ведет себя или как частица, или как волны, поэтому для световой волны можно переписать в следующем виде:

$$\left. \begin{array}{l} E = \hbar\omega, \\ \vec{p} = \hbar\vec{k}. \end{array} \right\} \psi = C e^{i(kx - \omega t)} = C e^{\frac{i}{\hbar}(px - Et)}.$$

Принципиальное различие классической и квантовой механики состоит в том, что энергия ЭМ волны есть на самом деле вероятность обнаружить фотон в данной точке пространства.

Принц Луи де-Бройль (Prince Louis de Broglie) получил очень хорошее образование, но во время первой мировой войны ушел служить. Отвоевав шесть лет, вернулся и пошел работать к своему брату, который занимался рентгеновскими исследованиями. В 1923 году де-Бройль защитил диссертацию, которую по достоинству оценил лишь один Эйнштейн, а рецензенты ее просто не поняли, хотя и были выдающимися учеными.

Де-Бройль сказал, что если волна является частицами, то и частица должна быть волной. Если есть частица конечной массы, обладающая энергией

$$E = \frac{p^2}{2m}, \quad p = \sqrt{2mE},$$

то можно подставить эти значения в формулу

$$\psi = C e^{\frac{i}{\hbar}(px - Et)}.$$

Это значит, что любая частица должна проявлять волновые свойства.

В Венском университете даже провели опыты по дифракции тяжелой частицы  $\text{Co}^{60}$  и получили дифракционную картину. То есть она действительно обладает волновыми свойствами. А если есть частота, то есть и длина волны

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2mE}}.$$

Дэвиссон и Джермер исследовали интенсивность рассеяния электронов от угла при прохождении через пленки разных образцов. Всегда получалась одна и та же картина. Но затем для пленки никеля, получился максимум. Оказалось, что этот угол соответствует брэгговскому рассеянию электронов на кристалле.

Но это все просто арифметика; модель, которая соответствует поведению частиц. А сами волны де-Бройля обнаружили относительно недавно, в 1993 году.

На поверхности монокристалла меди делали два дефекта. Свободные электроны относительно равномерно распределены по поверхности. Изучали образец с помощью

## Лекция 2. Квантовая физика

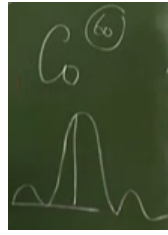


Рис. 2.1.

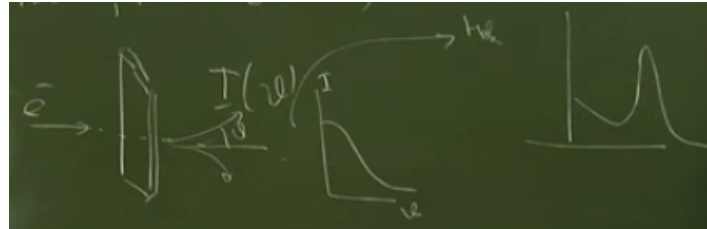


Рис. 2.2.

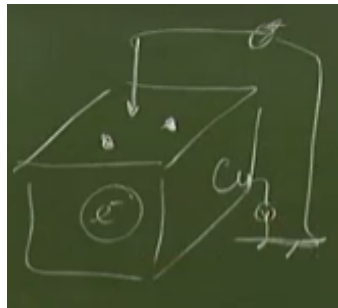


Рис. 2.3.

туннельного микроскопа. Оказалось, что электроны вблизи этих дефектов распределены как волны.

Критерием для изучения квантовых свойств объекта является сравнение длины волны частицы и характерных размеров системы.

Возьмем атом водорода и посмотрим, нужно ли учитывать квантовые свойства для взаимодействия электрон-протон.

$$R_H \simeq 10^{-8} \text{ см}, \quad E_{\text{хар}} \simeq 10 \text{ эВ}, \quad 1 \text{ эВ} = 1,6 * 10^{-12} \text{ эрг},$$

$$\lambda_{\text{дБ}} = \frac{h}{\sqrt{2mE}} = \frac{6 * 10^{-27}}{\sqrt{2 * 10^{-27} * 1,6 * 10^{-11}}} \simeq \frac{6}{1,7} * \frac{10^{-27}}{10^{-19}} \simeq 10^{-8} \text{ см}.$$

Длина волны де-Бройля в этом случае совпадает по порядку с размером атома, а значит квантовые свойства учитывать необходимо.

Теперь рассмотрим жидкий гелий. Он переходит в жидкое состояние при температуре  $T = 4,2 \text{ К}$ .

$$\rho = 0,15 \frac{\text{г}}{\text{см}^3}, \quad E = k_B T \simeq 4 * 10^{-4} \text{ эВ},$$

$$n = \frac{\rho}{m}, \quad R = n^{-1/3} \simeq 2 * 10^{-8} \text{ см}, \quad \lambda_{\text{дБ}} \simeq 5 * 10^{-8}.$$

Несмотря на то, что объект макроскопический, он является квантовым.

**Частица и волна де-Бройля — это одно и то же!**

Волна де-Бройля:  $\psi = C e^{\frac{i}{\hbar}(px - Et)}$  — свободной частице ставим в соответствие волну (волновую функцию).

А Эйнштейн сказал, что квадрат амплитуды волны — это вероятность обнаружить фотон в данном месте.

**2.1. Вероятностная интерпретация волновой функции**

Это понятие ввел Макс Борн. Что это значит?

Есть волновая функция и сопряженная ей:  $\psi, \psi^*(r, t)$ . Квадрат модуля — это и есть амплитуда волны:

$$|\psi|^2 = \psi^* \psi$$

Плотность вероятности обнаружения частицы, описываемой функцией  $\psi$  в заданной точке пространства в заданный момент времени:

$$dW(\vec{r}, t) = |\psi|^2 dV, \quad W(V, t) = \int_V |\psi|^2 dV.$$

Интересно узнать математические свойства волновой функции.

Поскольку частица где-то есть, то интеграл по всему пространству должен быть равен единице. Это называют нормировкой волновой функции:

1.

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi|^2 dV = 1.$$

Но это значит, что функция должна убывать быстрее, чем  $1/r$ , чтобы интеграл сходилась.

Если у частицы есть два состояния, то выполняется принцип суперпозиции:

2.

$$\psi = C_1 \psi_1 + C_2 \psi_2.$$

Если мы хотим узнать, каким импульсом обладает частица, то мы тоже можем это сделать с помощью волновой функции

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(k) e^{ikx} dk.$$

Обратное преобразование Фурье:

$$\psi(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int f(x) e^{-ikx} dx.$$

Эта функция и определяет вероятность того, какой импульс у системы.

Поскольку мы перешли к вероятностному описанию, то нужно вводить вероятностные правила к описанию системы.

Среднее значение координаты (квантовое среднее координаты)

$$\langle x \rangle = \int x * |\psi|^2 dx \equiv \int \psi^* x \psi dx.$$

## Лекция 2. Квантовая физика

В квантовой физике от величин переходят к операторам, для которых выполняется:

$$\langle f \rangle = \int \psi^* \hat{f} \psi dx.$$

Для координаты — оператор совпадает с самой величиной

$$\hat{x} \equiv x, \quad f(x) \rightarrow \hat{f}(x) \equiv f(x).$$

Для описания поведения частицы, нужно знать координату и импульс частицы.

Для свободной частицы

$$\langle p \rangle \equiv p, \quad \psi = A e^{\frac{c}{\hbar}(px - Et)}.$$

Тогда из определения:

$$p = \langle p \rangle = \int A e^{-\frac{c}{\hbar}(px - Et)} \hat{p} A e^{+\frac{c}{\hbar}(px - Et)} dx.$$

Для того чтобы у нас возник импульс, нужно продифференцировать, то есть получится

$$\hat{p} = -i\hbar \frac{d}{dx}, \quad \hat{p} = -i\hbar \nabla.$$

Теперь можно вычислить операторы кинетической и потенциальной энергии:

$$\hat{T} = \frac{\hat{p}^2}{2m} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta, \quad \hat{U} \equiv U(x).$$

Но все эти выражения бессмысленны, если нет законов их изменения. Шредингер придумал уравнение для описания эволюции волновой функции.

Запишем энергию:

$$E = \hbar\omega$$

Для плоской волны запишем волновую функцию

$$\psi = A * \exp[i(kx - \omega t)]$$

Теперь рассмотрим производную

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = -i\omega \psi, \quad \hbar\omega = i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} \frac{1}{\psi} = E, \quad i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \hat{T} \psi.$$

После взаимодействия

$$E = T + U = H, \quad T = \frac{p^2}{2m}, \quad U = U(x).$$

**Уравнение Шредингера:**

$$\boxed{i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \hat{H} \psi}$$

Но это уравнение очень сложное.

$$T = \frac{p^2}{2m} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}.$$

Если есть свободная частица, то

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} = -k_x^2\psi$$

— **стационарное уравнение Шредингера**, которое описывает систему, не изменяющуюся во времени.

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi + U\psi = \hat{H}\psi.$$

Есть еще одна вещь, отличающая микромир от макромира. Ее указал Гейзенберг. В макромире нет проблемы определения координаты.

Мысленный эксперимент Гейзенберга. Облучим электрон светом и посмотрим в микроскопе. Но изображение будет размазанным за счет дифракции, т. е. мы не можем точно определить координату.

$$R\beta = \frac{\lambda}{\beta}\beta = \lambda \simeq \Delta x \sin \alpha, \quad \Delta x \sim \frac{\lambda}{\sin \alpha}.$$

С такой точностью мы можем определить координату.

Но при облучении электрона мы поменяли его импульс:

$$\Delta p_x \sim p_0 \sin \alpha = \frac{\hbar}{\lambda} \sin \alpha$$

**Соотношение неопределенностей Гейзенберга:**

$$\Delta p_x \Delta x \sim \hbar$$

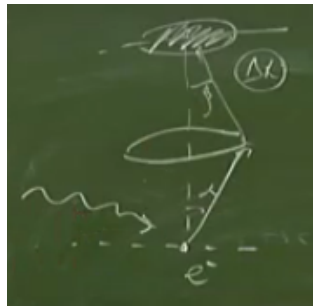


Рис. 2.4.

То есть при измерении мы изменяем саму систему.

Были только мысленные эксперименты, но недавно провели реальные эксперимент по нахождению соотношения неопределенностей.

Существует ловушка для щелочных металлов — специальная конфигурация поля, что они удерживаются вместе. Если понижать температуру, то образуется Бозе-конденсат  $\Delta p = 0$ . В этой ловушке сняли поле и атомы начали разлетаться. Измеряя размер, на который разлетелись атомы, можно определить, каким импульсом они обладали. В Бозе-конденсате  $\Delta p = 0$  только для бесконечной системы.

Измерения производили при разных размерах начальной системы.

Оказалось, что  $\Delta p \Delta l \sim \hbar$ . Зависимость  $\Delta p$  от  $\Delta l$  приведена на графике.

Нильс Бор ввел принцип дополнительности — *никогда нельзя знать точно сопряженные переменные.*

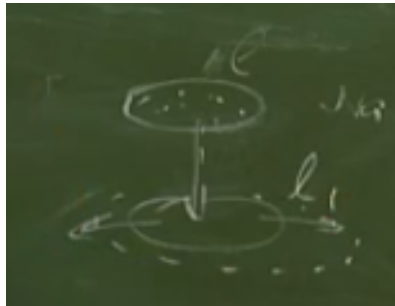


Рис. 2.5.

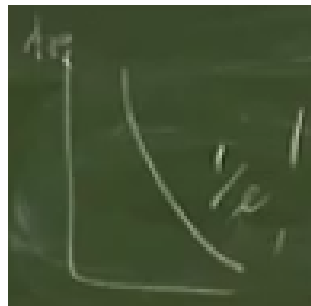


Рис. 2.6.

Провели эксперимент по рассеянию атомов натрия на дифракционной решетке. Они определяли положение атомов в плоскости и при этом в другой плоскости была интерференционная картина. Но когда они передвинулись и стали измерять положение в другой плоскости, картина пропала.

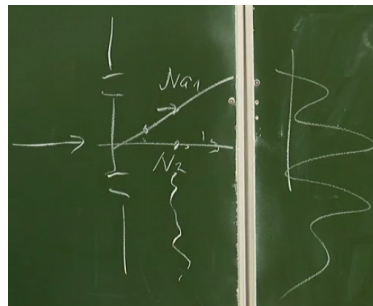


Рис. 2.7.