Вопрос 14. Метод Фурье решения краевых задач для оператора Лапласа в полосе и полуполосе. Условия на бесконечности и классы единственности решений. Понятие обобщенного (слабого) решения.

Классическим решением задачи Дирихле для оператора Лапласа в полуполосе

$$\begin{aligned} &u_{xx}+u_{yy}=0,\ (x,y)\in\Pi_+\stackrel{\text{def}}{=}\big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\colon x>0,\ 0<y<\frac{\pi}{2}\big\};\\ &u|_{y=0}=u_y|_{y=\frac{\pi}{2}}=0,\ x\geqslant 0;\\ &u|_{x=0}=a(y),\quad 0<y<\frac{\pi}{2}; \end{aligned}\tag{1}$$

называют функцию $u\in C^2(\Pi_+)\cap C^1(\overline{\Pi}_+)$, удовлетворяющую уравнению и краевым условиям (1). Требуется также, чтобы классическое решение удовлетворяло еще и некоторому условию на бесконечности, которое ограничивает поведение решения при $x\to\infty$, гарантируя единственность решения. Чем сильнее такое ограничение, тем лучше для единственности. Однако усиление такого ограничения может привести к потере существования решения. Корректная постановка краевой задачи требует отыскания некоторого идеального баланса требований к решению, гарантирующих единственность решения, но не препятствующих его существованию. Именно по этой причине важно найти самый «широкий» класс, гарантирующий единственность. Такой класс и называют «классом единственности». Для эллиптической краевой задачи в неограниченной области, помимо уравнения и краевых условий, класс единственности существенно зависит еще и от геометрии области в окрестности бесконечности.

В краевой задаче (1) условие на бесконечности будем задавать в терминах *о-маленького* и *$\mathcal{O}$-большого* при $x\to\infty$. Классом единственности назовем *самый широкий класс* вида

$$u(x,y)=o(\varphi_(x))\ \text{при}\ x\to\infty\ \text{равномерно по}\ y\in\big[0,\frac{\pi}{2}\big].\tag{2}$$

в котором краевая задача (1) имеет единственное решение. При этом под *самым широким классом* подразумевается такой выбор функции φ в условии вида (2), который гарантирует единственность и при котором замена *о-маленького* на *$\mathcal{O}$-большое* приводит к потере единственности. Принятие такого определения класса единственности однозначно решает проблему выбора функции φ в условии (2) для краевой задачи (1), т. е. принятое определение класса единственности корректно.

Обозначим через $\mathcal{L}_2(\Omega)$ вещественное пространство $C(\overline{\Omega})$ со скалярным произведением

$$(u,v)=\int\limits_{\Omega}uv\,dx\,dy,$$

которое порождает норму

$$\|u\|=\Big(\int\limits_{\Omega}|u(x)|^2dx\Big)^{1/2}.$$

Для положительных $r>0$ обозначим через Π_r прямугольник

$$\Pi_r\stackrel{\text{def}}{=}\big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\colon 0<x<r,\ 0<y<\frac{\pi}{2}\big\}\subset\Pi_+\,.$$

Обобщенным (или слабым) решением краевой задачи (1) будем называть функцию $u \in \mathcal{L}_2(\Pi_r)\ \forall\, r > 0$, удовлетворяющую интегральному тождеству

$$
\begin{gathered}
\int\limits_{\Pi_+} u(x,y)\Delta v(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_0^{\pi/2} a(y) v_x(0,y)\,dy \\
\forall\, v \in \overset{\circ}{C}{}^{\infty}(\mathbb{R}^2):\ \ v|_{x=0} = a(y),\ 0 < y < \frac{\pi}{2}; \quad v|_{y=0} = v_y|_{y=\frac{\pi}{2}} = 0,\ \ x \geqslant 0.
\end{gathered}
\tag{3}
$$

Лемма 1 (без доказательства)**.** *Если обобщенное (слабое) решение краевой задачи* (1), *имеет классическую гладкость, то оно является классическим.*

Метод Фурье для слабых решений

Метод Фурье для классических и слабых решений опирается на одну и ту же задачу Штурма-Лиувилля. В данном случае это задача:

$$
\begin{aligned}
&Y'' = \lambda Y, \quad 0 < y < \frac{\pi}{2}\,; \\
&Y(0) = Y'\big(\frac{\pi}{2}\big) = 0,
\end{aligned}
\tag{4}
$$

решением которой является полная ортогональная система в $\mathcal{L}_2(\Omega)$:

$$
\begin{aligned}
&Y_n(y) = \sin(2n+1)y, \\
&\lambda_n = -(2n+1)^2,\ \ n \geqslant 0.
\end{aligned}
\tag{5}
$$

Разложим теперь искомое слабое решение краевой задачи (1) в ряд Фурье по системе собственных функций $\{Y_n\}_{n=0}^{\infty}$:

$$
u(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} X_n(x)\sin(2n+1)y \tag{6}
$$

с искомыми коэффициентами Фурье

$$
X_n(x) = \frac{4}{\pi}\int\limits_0^{\pi/2} u(x,y)\sin(2n+1)y\,dy. \tag{7}
$$

Чтобы получить краевые задачи для искомых коэффициентов Фурье, достаточно в интегральном тождестве (3) выбрать пробные функции вида

$$
v(x,y) = \psi(x)\sin(2n+1)y \quad \forall\, n \geqslant 0, \quad \forall\, \psi \in \overset{\circ}{C}{}^{\infty}(\mathbb{R})\colon \psi(0) = 0. \tag{8}
$$

Действительно, подставляя в интегральное тождество (3) пробные функции (8) и учитывая вид коэффициентов Фурье (7), получим семейство интегральных тождеств

$$
\int\limits_0^{\infty} \big[X_n(x)\psi''(x) - (2n+1)^2 X_n(x)\psi(x)\big]\,dx = a_n\psi(0) \quad \psi \in \overset{\circ}{C}{}^{\infty}(\mathbb{R})\colon \forall\, \psi(0) = 0,\ \ n \geqslant 0, \tag{9}
$$

где числа $\{a_n\}$ являются коэффициентами Фурье граничных данных:

$$a_n = \frac{4}{\pi}\int\limits_0^{\pi/2} a(y)\sin(2n+1)y\,dy, \quad n \geqslant 0.$$

Заметим, что интегральные тождества (9) являются обобщенными постановками краевых задач для искомых коэффициентов Фурье:

$$\begin{aligned} &X_n'' - (2n+1)^2 X_n = 0, \quad x > 0,\\ &X_n(0) = a_n \quad n \geqslant 0. \end{aligned} \tag{10}$$

Точнее, справедлива следующая

Лемма 2 (без доказательства). *Пусть функция* $X_n \in \mathcal{L}_2(\Pi_r)\ \forall\, r > 0$ *удовлетворяет интегральному тождеству* (9). *Тогда* $X_n \in C^\infty[0,\infty)$, *удовлетворяет уравнению и краевому условию* (10).

Осталось найти класс единственности в краевой задаче (1). Для этого нужно при каждом $n \geqslant 0$ найти класс единственности в краевой задаче (10). С этой целью рассмотрим однородную краевую задачу (1), т.е. уравнение (1) с краевым условием $X_n(0) = 0$. Из общего вида решения такой задачи

$$X_n(x) = C\cdot\big(e^{(2n+1)x} - e^{-(2n+1)x}\big), \quad x \geqslant 0,\ n \geqslant 0, \tag{11}$$

следует, что искомое условие на бесконечности имеет вид

$$X_n(x) = o\big(e^{(2n+1)x}\big) \text{ при } x \to \infty. \tag{12}$$

Действительно, из (12) сразу же следует, что $C = 0$, т.е. однородная краевая задача (10) имеет в классе (12) только тривиальное решение. При этом замена *о-маленького* на $\mathcal{O}$-*большое* в условии (12) приводит к потере единственности, в чем легко убедиться, полагая $C = 1$ в представлении (11). Таким образом, условие (12) определяет класс единственности для краевой задачи (10).

В силу определения коэффициентов Фурье (7) классом единственности в краевой задаче (1) будет пересечение всех классов (12). Это означает, что искомый класс единственности в краевой задаче (1) имеет вид

$$u(x,y) = o(e^x) \text{ при } x \to \infty \text{ равномерно по } y \in \Big[0, \frac{\pi}{2}\Big], \tag{13}$$

где при замене *о-маленького* на $\mathcal{O}$-*большое*, как и требуется, получаем пример нетривиального решения $u = \operatorname{sh} x \sin y$ однородной краевой задачи (1), т.е. задачи (1) с краевым условием $u|_{x=0} = 0$.