ГЛАВА 12

ТЕОРЕМА О НЕЯВНОЙ ФУНКЦИИ

§ 1. Теорема о неявной функции для одного уравнения

Пусть $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $y_0 \in \mathbb{R}^1$ и в окрестности точки $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^{n+1}$ задана скалярная функция $F(x, y)$. Нас будет интересовать решение $y = y(x)$ уравнения $F(x, y) = 0$. При этом в явном виде найти функцию $y(x)$ зачастую не удается. В связи с этим функция $y(x)$ называется *неявной*.

Теорема 1. Пусть $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $y_0 \in \mathbb{R}^1$ и пусть скалярная функция $F(x, y)$ удовлетворяет условиям:

(1) $F(x_0, y_0) = 0$,

(2) функция F непрерывна в $U_\varepsilon(x_0, y_0)$,

(3) частная производная $F'_y(x, y)$ существует в $U_\varepsilon(x_0, y_0)$ и непрерывна в точке (x_0, y_0),

(4) $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$.

Тогда существуют числа $\gamma > 0$, $\delta > 0$ и непрерывная в точке x_0 функция $\varphi : U_\gamma(x_0) \to U_\delta(y_0)$ такая, что для любого $x^* \in U_\gamma(x_0)$ система уравнений $F(x^*, y) = \overline{0}$ на множестве $U_\delta(y_0)$ имеет единственное решение $y^* = \varphi(x^*)$.

Доказательство. Для определенности будем предполагать, что $F'_y(x_0, y_0) > 0$. Тогда в силу непрерывности функции $F'_y(x, y)$ в точке (x_0, y_0) существует число $\varepsilon_1 \in (0, \varepsilon)$ такое, что

$$F'_y(x, y) > 0 \qquad \forall (x, y) \in U_{\varepsilon_1}(x_0, y_0). \tag{1}$$

Зафиксируем произвольное число $\delta \in \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}\varepsilon_1\right]$. Тогда для любых $x \in U_\delta(x_0)$, $y \in U_\delta(y_0)$ выполняются соотношения

$$|(x, y) - (x_0, y_0)| = \sqrt{|x - x_0|^2 + |y - y_0|^2} < \sqrt{\delta^2 + \delta^2} \leq \varepsilon_1,$$

т. е. $(x, y) \in U_{\varepsilon_1}(x_0, y_0)$. Поэтому согласно соотношению (1) для любого $x \in U_\delta(x_0)$ функция $F(x, y)$ строго возрастает по y на отрезке $[y_0 - \delta, y_0 + \delta]$.

Отсюда и из равенства $F(x_0, y_0) = 0$ следуют неравенства

$$F(x_0, y_0 - \delta) < 0,$$

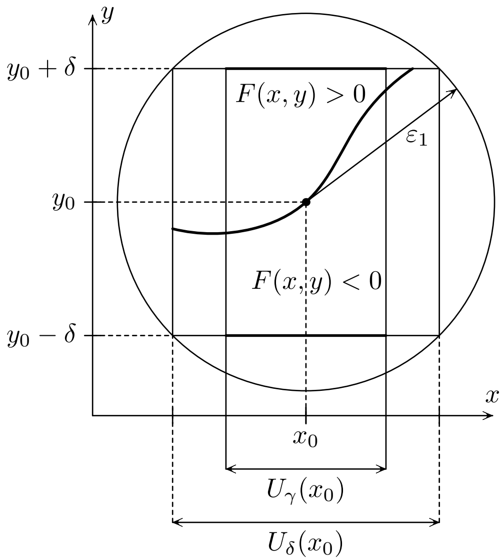
$$F(x_0, y_0 + \delta) > 0.$$

Поэтому в силу непрерывности функции F в $U_\varepsilon(x_0, y_0)$ существует число $\gamma \in (0, \delta]$ такое, что

$$\forall x \in U_\gamma(x_0) \hookrightarrow$$

$$F(x, y_0 - \delta) < 0,$$

$$F(x, y_0 + \delta) > 0.$$



Применяя теорему о промежуточном значении для функции $f(y) = F(x, y)$, непрерывной на отрезке $[y_0 - \delta, y_0 + \delta]$, получаем, что для любого $x \in U_\gamma(x_0)$ существует число $\varphi(x) \in (y_0 - \delta, y_0 + \delta)$ такое, что $F(x, \varphi(x)) = 0$. Тем самым определена функция $\varphi : U_\gamma(x_0) \to U_\delta(y_0)$. Из строго возрастания функции $F(x, y)$ по y в $U_\delta(y_0)$ следует, что для любого $x \in U_\gamma(x_0)$ число $y = \varphi(x)$ является единственным в $U_\delta(y_0)$ решением уравнения $F(x, y) = 0$.

Поскольку число δ было выбрано как произвольное число из интервала $\left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}\,\varepsilon_1\right)$, то эти же рассуждения можно провести для произвольного числа $\delta_1 \in (0, \delta]$. В результате получим, что

$$\forall \delta_1 \in (0, \delta]\ \exists \gamma_1 \in (0, \gamma] :\ \forall x \in U_{\gamma_1}(x_0) \hookrightarrow\ \varphi(x) \in U_{\delta_1}(y_0).$$

Тем самым доказана непрерывность функции φ в точке x_0. $\square$

§ 2. Операторная норма матрицы. Теорема Лагранжа о среднем

Определение. Пусть A – матрица размера $m \times n$. *Операторной нормой матрицы* A называется число