5. В четырехмерном пространстве заданы:
а) четыре подпространства; б) пять подпространств;
в) пять ненулевых подпространств.
Может ли их сумма быть прямой?

§ 3. Линейные отображения

1. Определение. Пусть $\mathscr{L}$ и $\overline{\mathscr{L}}$ — два линейных пространства, оба вещественные или оба комплексные. Под *отображением* A пространства $\mathscr{L}$ в пространство $\overline{\mathscr{L}}$ понимается закон, по которому каждому вектору из $\mathscr{L}$ сопоставлен единственный вектор из $\overline{\mathscr{L}}$. Мы будем писать $A\colon\ \mathscr{L} \to \overline{\mathscr{L}}$. Образ вектора x обозначается $A(x)$.

Определение. Отображение $A\colon\ \mathscr{L} \to \overline{\mathscr{L}}$ называется *линейным*, если для любых векторов x и y из $\mathscr{L}$ и любого числа α выполнены равенства

$$A(x+y) = A(x) + A(y), \qquad A(\alpha x) = \alpha A(x). \tag{1}$$

Следует подчеркнуть, что знак $+$ в левой и правой частях первой из формул (1) обозначает две, вообще говоря, различные операции: сложение в пространстве $\mathscr{L}$ и сложение в пространстве $\overline{\mathscr{L}}$. Аналогичное замечание относится и ко второй формуле.

Линейное отображение мы будем называть *линейным преобразованием*, если пространства $\mathscr{L}$ и $\overline{\mathscr{L}}$ совпадают.

Пример 1. Пусть λ — фиксированное число. Сопоставим каждому вектору x пространства $\mathscr{L}$ вектор λx. Легко видеть, что это — линейное преобразование.

Пример 2. При аффинном преобразовании плоскости двумерное пространство векторов, на ней лежащих, отображается само на себя. В силу формул (11) § 2 гл. IV — это линейное преобразование.

Пример 3. Выберем в n-мерном линейном пространстве $\mathscr{L}$ какой-нибудь базис. Это сопоставит каждому вектору его координатный столбец и тем определит линейное отображение пространства $\mathscr{L}$ в n-мерное арифметическое пространство (пространство столбцов).

Пусть $\mathscr{L}$ — вещественное пространство. Сопоставляя каждому вектору его первую компоненту в выбранном базисе, мы получаем линейное отображение $\mathscr{L}$ в линейное пространство вещественных чисел.

Пример 4. Пусть $C^0[-1,1]$ и $C^0[0,2]$ — пространства функций, непрерывных соответственно на отрезках $[-1,1]$ и $[0,2]$. Сопоставим функции $f(t)$ из первого пространства функцию $\varphi(s) = f(s-1)$ из второго. Это отображение, очевидно, является линейным. Пример преобразования можно получить, если сопоставить функции из $C^0[-1,1]$ ее первообразную $F(t)$, удовлетворяющую условию $F(0)=0$.

Пример 5. Рассмотрим n-мерное арифметическое пространство $\mathscr{R}^n$ и прямоугольную матрицу A размеров $m\times n$. Сопоставим столбцу $\xi \in \mathscr{R}^n$ столбец $A\xi$. Он имеет высоту m. Таким образом, определено отображение $\mathscr{R}^n$ в $\mathscr{R}^m$. В силу свойств умножения матриц это отображение линейное.

Пример 6. Отображение, сопоставляющее каждому вектору из $\mathscr{L}$ нулевой вектор из $\overline{\mathscr{L}}$, является линейным. Оно называется *нулевым* отображением.

В дальнейшем в этом параграфе n и m будут обозначать размерности пространства $\mathscr{L}$ и $\overline{\mathscr{L}}$ соответственно.

Из определения немедленно вытекает, что при линейном отображении линейная комбинация векторов переходит в такую же линейную комбинацию их образов.

Нулевой вектор переходит в нулевой, поскольку $A(o) = A(0x) = 0A(x) = o$. (Обратим внимание, что нулевые векторы пространств $\mathscr{L}$ и $\overline{\mathscr{L}}$ мы обозначаем одинаково.)

Из сказанного следует, что при линейном отображении линейно зависимые векторы отображаются в линейно зависимые. Как показывает пример 6, обратное вовсе не обязательно верно.

Предложение 1. *При линейном отображении $A\colon \mathscr{L} \to \overline{\mathscr{L}}$ линейное подпространство $\mathscr{L}' \subseteq \mathscr{L}$ переходит в линейное подпространство $A(\mathscr{L}') \subseteq \overline{\mathscr{L}}$, причем $\dim A(\mathscr{L}') \leqslant \dim \mathscr{L}'$.*

Для нулевого подпространства утверждение очевидно. Рассмотрим подпространство $\mathscr{L}'$ размерности $k > 0$. Пусть $e_1, ..., e_k$ — базис в $\mathscr{L}'$. Для любого вектора $x \in \mathscr{L}'$ имеем $x = \xi^1 e_1 + ... + \xi^k e_k$ и

$$A(x) = A(\xi^1 e_1 + ... + \xi^k e_k) = \xi^1 A(e_1) + ... + \xi^k A(e_k). \qquad (2)$$

Это означает, что произвольный элемент множества $A(\mathscr{L}')$ образов всех векторов из $\mathscr{L}'$ есть линейная комбинация векторов $A(e_1), ...$ $..., A(e_k)$. Наоборот, каждая такая линейная комбинация, очевидно, является образом вектора из $\mathscr{L}'$. Итак, множество $A(\mathscr{L}')$ — линейная оболочка $A(e_1), ..., A(e_k)$, и, следовательно, есть подпространство. Размерность его не превосходит k в силу предложения 1 §2.

Необходимо отметить частный случай доказанного предложения: множество образов всех векторов из $\mathscr{L}$ является подпространством $A(\mathscr{L})$ в $\overline{\mathscr{L}}$. Оно называется *множеством значений* отображения и обозначается $\operatorname{Im} A$.

Определение. Размерность множества значений отображения называется *рангом* отображения.

Если ранг A равен m, то $A(\mathscr{L})$ совпадает с $\overline{\mathscr{L}}$, и каждый вектор из $\overline{\mathscr{L}}$ является образом некоторого вектора из $\mathscr{L}$. Отображение, обладающее этим свойством, называется *сюръективным* отображением.

Определение. Множество векторов, отображающихся в нулевой вектор при отображении A, называется *ядром* отображения A и обозначается $\operatorname{Ker} A$.

Предложение 2. *Ядро есть линейное подпространство в $\mathscr{L}$.*

Действительно, ядро не пусто: оно во всяком случае содержит нулевой вектор. Далее, если $A(x) = o$ и $A(y) = o$, то $A(\alpha x + \beta y) = \alpha A(x) + \beta A(y) = o$.

Пусть ядро A ненулевое: $\dim \operatorname{Ker} A \geqslant 1$. Тогда каждый вектор из $A(\mathscr{L})$ имеет бесконечно много прообразов. Действительно, если $y = A(x)$ и $o \neq x_0 \in \operatorname{Ker} A$, то $A(x + x_0) = y$. Верно и обратное утверждение: если какой-то вектор $y \in \overline{\mathscr{L}}$ имеет хотя бы два различных прообраза, то ядро A содержит ненулевой вектор. Действительно, если $A(x_1) = A(x_2) = y$ для $x_1 \neq x_2$, то $A(x_1 - x_2) = o$ и $z = x_1 - x_2$ — ненулевой вектор в ядре.

Отображение, при котором различные векторы имеют различные образы, называется *инъективным* отображением. Итак, получено

Предложение 3. *Отображение инъективно тогда и только тогда, когда его ядро — нулевое подпространство.*

Если отображение инъективно, то линейно независимые векторы переходят в линейно независимые. Действительно, пусть образы векторов $x_1, ..., x_k$ линейно зависимы: $\alpha_1 A(x_1) + ... + \alpha_k A(x_k) = o$. Тогда $A(\alpha_1 x_1 + ... + \alpha_k x_k) = o$. Отсюда для инъективного отображения получаем $\alpha_1 x_1 + ... + \alpha_k x_k = o$, и, следовательно, $x_1, ..., x_k$ линейно зависимы.

2. Координатная запись отображений. Рассмотрим линейные пространства $\mathscr{L}$ и $\overline{\mathscr{L}}$ размерностей n и m и линейное отображение $A\colon \mathscr{L} \to \overline{\mathscr{L}}$. Пусть $e_1, ..., e_n$ — базис в $\mathscr{L}$. Тогда образ произвольного вектора $x = \xi^1 e_1 + ... + \xi^n e_n$ раскладывается в линейную комбинацию

$$A(x) = \xi^1 A(e_1) + ... + \xi^n A(e_n). \tag{3}$$

Значит, $A(x)$ может быть найден по координатам x, если известны образы базисных векторов $A(e_1), ..., A(e_n)$.

Выберем также базис в пространстве $\overline{\mathscr{L}}$. Пусть это $\mathbf{f} = \| f_1 \dots f_m \|$. Каждый из образов базисных векторов мы можем разложить по $\mathbf{f}$:

$$A(e_i) = \sum_{p=1}^{m} \alpha_i^p f_p \quad (i = 1, ..., n).$$

Если компоненты вектора $A(x)$ мы обозначим через $\eta^1, ..., \eta^m$, то равенство (3) может быть переписано так:

$$\sum_{p=1}^{m} \eta^p f_p = \sum_{i,p} \xi^i \alpha_i^p f_p.$$

Отсюда в силу единственности разложения по базису

$$\eta^p = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^p \xi^i \quad (p = 1, ..., m). \tag{4}$$

Если мы составим матрицу A из чисел α_i^p, то равенства (4) могут быть записаны в матричной форме

$$\eta = A\xi, \tag{5}$$

или, подробнее,

$$\left\| \begin{matrix} \eta^1 \\ \vdots \\ \eta^m \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} \alpha_1^1 & \dots & \alpha_n^1 \\ \dots & \dots & \dots \\ \alpha_1^m & \dots & \alpha_n^m \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} \xi^1 \\ \vdots \\ \xi^n \end{matrix} \right\|.$$

Здесь координатный столбец образа вектора x (в базисе $\mathbf{f}$) выражен как произведение матрицы A размеров $m \times n$ на координатный столбец вектора x в базисе $\mathbf{e}$.

Определение. *Матрицей линейного отображения A: $\mathscr{L} \to \overline{\mathscr{L}}$* в паре базисов $\mathbf{e}$ и $\mathbf{f}$ называется матрица, столбцы которой (в их естественном порядке) — координатные столбцы векторов $\mathsf{A}(e_1), \dots, \mathsf{A}(e_n)$ в базисе $\mathbf{f}$.

Формула (5) показывает, как употребляется матрица линейного отображения для нахождения образа вектора.

Матрица линейного отображения в следующем смысле однозначно определена: если для любого вектора $x = \mathbf{e}\xi$ координатный столбец образа в базисе $\mathbf{f}$ есть $\eta = B\xi$, то матрица B совпадает с A. Это утверждение нетрудно проверить. Умножим матрицу B на координатный столбец вектора e_i, т. е. на i-й столбец единичной матрицы. Произведение равно i-му столбцу B, а это и есть координатный столбец $\mathsf{A}(e_i)$.

Пример 5 показывает, что при выбранных в пространствах $\mathscr{L}$ и $\overline{\mathscr{L}}$ базисах каждая матрица размеров $m \times n$ служит матрицей некоторого линейного отображения $\mathscr{L} \to \overline{\mathscr{L}}$.

Предложение 4. *Ранг матрицы линейного отображения равен рангу этого отображения.*

Доказательство. Пусть $j_1, \dots, j_r$ — номера базисных столбцов матрицы A линейного отображения A. Тогда векторы $\mathsf{A}(e_{j_1}), \dots, \mathsf{A}(e_{j_r})$ линейно независимы и каждый из векторов $\mathsf{A}(e_i)$ $(i = 1, \dots, n)$ по ним раскладывается. Следовательно, мы можем разложить образ $\mathsf{A}(x)$ любого вектора только по $\mathsf{A}(e_{j_1}), \dots, \mathsf{A}(e_{j_r})$. Таким образом, эти векторы образуют базис в $\operatorname{Im} \mathsf{A}$, и их число равно рангу A. Предложение доказано.

Из этого предложения видно, что ранг матрицы линейного отображения один и тот же, какую бы пару базисов мы ни выбрали.

Предложение 5. *Сумма ранга отображения и размерности его ядра равна размерности отображаемого пространства.*

Доказательство. Согласно формуле (5) ядро отображения определяется однородной системой линейных уравнений $A\xi = o$ с n неизвестными. Ранг матрицы системы равен рангу отображения r. Фундаментальная система решений этой системы состоит из $d = n - r$

решений, которые являются координатными столбцами векторов, составляющих базис в ядре.

В частности, равенство $r = n$ необходимо и достаточно, чтобы отображение имело нулевое ядро, т. е. было инъективным.

Таким образом, в произвольном базисе

• столбцы матрицы отображения линейно независимы тогда и только тогда, когда отображение инъективно,

• строки матрицы линейно независимы тогда и только тогда, когда отображение сюръективно.

Напомним, что отображение называется *взаимно однозначным*, если каждый вектор $y \in \overline{\mathscr{L}}$ является образом одного и только одного вектора из $\mathscr{L}$, т. е. если оно является как инъективным, так и сюръективным. Для инъективного отображения $r = n$, а для сюръективного $r = m$. Итак, имеет место

Предложение 6. *Линейное отображение* A: $\mathscr{L} \to \overline{\mathscr{L}}$ *взаимно однозначно тогда и только тогда, когда размерности пространств совпадают и равны рангу отображения:* $n = m = \operatorname{Rg} A$.

3. Изоморфизм линейных пространств. Дадим следующее

Определение. Взаимно однозначное линейное отображение называется *изоморфизмом.* Если существует изоморфизм $\mathscr{L} \to \overline{\mathscr{L}}$, то линейные пространства $\mathscr{L}$ и $\overline{\mathscr{L}}$ называются *изоморфными.*

Пример 7. Выбор базиса в n-мерном линейном пространстве $\mathscr{L}$ определяет изоморфизм $\mathscr{L}$ на n-мерное арифметическое пространство, сопоставляющий каждому вектору его координатный столбец. Это *координатный изоморфизм.*

Из предложения 6 видно, что два линейных пространства могут быть изоморфны только тогда, когда их размерности совпадают. Оказывается, это условие является и достаточным: имеет место

Теорема 1. *Два вещественных пространства изоморфны тогда и только тогда, когда их размерности равны. То же верно и для комплексных пространств.*

Нам остается проверить только достаточность условия. Она очевидна: пусть $\mathscr{L}$ и $\overline{\mathscr{L}}$ — два n-мерных линейных пространства. Если в каждом из них выбран базис, то любая невырожденная квадратная матрица порядка n по формуле (5) определяет линейное отображение, которое будет изоморфизмом согласно предложению 6.

Значение теоремы об изоморфизме линейных пространств — в следующем. Линейные пространства могут состоять из чего угодно (столбцов, многочленов, чисел, направленных отрезков, функций) — природа их элементов роли не играет, когда изучаются их свойства, связанные с линейными операциями. Все эти свойства у двух изоморфных пространств совершенно одинаковы. Если мы условимся не различать между собой изоморфные пространства, то для каждой размерности найдется только одно линейное пространство.

объединение базисов инвариантных подпространств.

Преобразование A каждому вектору из инвариантного подпространства $\mathscr{L}'$ сопоставляет вектор из $\mathscr{L}'$. Этим определено преобразование подпространства $\mathscr{L}'$, которое мы назовем *ограничением* A на $\mathscr{L}'$ и обозначим A'. Для векторов из $\mathscr{L}'$ по определению $A'(x) = A(x)$, а для векторов, не принадлежащих $\mathscr{L}'$, преобразование A' не определено. A' отличается от A только тем, что оно преобразует $\mathscr{L}'$ в $\mathscr{L}'$, а не $\mathscr{L}$ в $\mathscr{L}$.

Если сохранить обозначения, введенные выше, то нетрудно заметить, что в базисе $e_1, \ldots, e_k$ подпространства $\mathscr{L}'$ матрицей ограничения A' является клетка A_1 матрицы (2).

Инвариантные подпространства преобразования A тесно связаны с преобразованиями, перестановочными с A. Эту связь описывает

Предложение 3. *Если преобразования A и B перестановочны, то ядро и множество значений одного из них инвариантны относительно другого.*

Доказательство. 1°. Если $x \in \operatorname{Ker} A$, то $A(x) = o$, и потому $B(A(x)) = o$. Тогда $A(B(x)) = o$, а значит, $B(x) \in \operatorname{Ker} A$.

2°. Если $x \in \operatorname{Im} A$, то существует вектор z такой, что $x = A(z)$. Тогда $B(x) = B(A(z)) = A(B(z))$. Это означает, что $B(x) \in \operatorname{Im} A$.

4. Собственные подпространства. Мы найдем подпространство, инвариантное относительно заданного линейного преобразования A, если найдем преобразование, перестановочное с A и имеющее ненулевое ядро. Перестановочны с A прежде всего многочлены от A и, в частности, простейшие из них — линейные. Умножив при необходимости линейный многочлен на число, напишем его в виде $A - \lambda E$.

Определение. Если для числа λ подпространство $\operatorname{Ker}(A - \lambda E)$ ненулевое, то λ называется *собственным значением* преобразования, а подпространство — *собственным подпространством*, соответствующим (или принадлежащим) собственному значению λ.

Отметим один важный частный случай. Если преобразование A имеет ненулевое ядро, то это ядро — собственное подпространство, соответствующее собственному значению $\lambda = 0$. Ограничение A на этом инвариантном подпространстве — нулевое преобразование.

Если вектор x лежит в собственном подпространстве, то для него $(A - \lambda E)(x) = o$ или $A(x) - \lambda E(x) = A(x) - \lambda x = o$ и, окончательно,

$$A(x) = \lambda x. \tag{4}$$

Отсюда следует

Предложение 4. *Ограничение преобразования на собственном подпространстве является или нулевым преобразованием, или гомотетией: оно умножает каждый вектор этого подпространства на собственное значение.*

Пусть нам каким-то образом удалось найти собственные значения преобразования A. Тогда для нахождения собственных подпространств нужно для каждого собственного значения λ составить систему линейных уравнений

$$(A - \lambda E)\boldsymbol{\xi} = \mathbf{o}, \tag{5}$$

где A — матрица преобразования в некотором базисе e. Фундаментальная система решений системы (5) состоит из координатных столбцов векторов, составляющих базис собственного подпространства. В развернутом виде система (5) записывается так:

$$\begin{aligned} (\alpha_1^1 - \lambda)\xi^1 + \alpha_2^1\xi^2 + \ldots + \alpha_n^1\xi^n = 0, \\ \alpha_1^2\xi^1 + (\alpha_2^2 - \lambda)\xi^2 + \ldots + \alpha_n^2\xi^n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_1^n\xi^1 + \alpha_2^n\xi^2 + \ldots + (\alpha_n^n - \lambda)\xi^n = 0. \end{aligned} \tag{6}$$

Определение. Вектор x называется *собственным вектором* преобразования A, соответствующим (или принадлежащим) собственному значению λ, если: 1) $x \neq o$; 2) $A(x) = \lambda x$.

Определение означает, что собственные векторы — это ненулевые векторы собственных подпространств.

Предложение 5. *Собственные векторы и только они являются базисными векторами одномерных подпространств, инвариантных относительно A.*

Доказательство. 1°. Пусть вектор x собственный, а y принадлежит одномерному подпространству $\mathscr{L}'$ с базисом x. Тогда $y = \alpha x$ и $A(y) = \alpha A(x) = \alpha\lambda x$. Значит, $A(y)$ лежит в $\mathscr{L}'$.

2°. Пусть x — базис инвариантного подпространства $\mathscr{L}'$. Тогда $A(x)$ лежит в $\mathscr{L}'$ и раскладывается по базису: $A(x) = \lambda x$. Так как $x \neq o$, он собственный.

Следствие. *В собственном подпространстве через каждый вектор проходит одномерное инвариантное подпространство.*

Предложение 6. *В i-м столбце матрицы линейного преобразования все элементы вне главной диагонали равны нулю тогда и только тогда, когда i-й базисный вектор собственный. В этом случае диагональный элемент столбца — собственное значение.*

Действительно, если базисный вектор e_i собственный, то $A(e_i) = \lambda e_i$, и поэтому i-й элемент координатного столбца вектора $A(e_i)$ равен λ, а остальные элементы равны нулю. Остается вспомнить, что координатный столбец $A(e_i)$ есть i-й столбец матрицы преобразования. Обратное утверждение доказывается аналогично.

5. Характеристическое уравнение. Выберем базис и обозначим через A матрицу линейного преобразования A в этом базисе. Тогда преобразование $A - \lambda E$ имеет матрицу $A - \lambda E$, и согласно предложению 5 § 3 его ядро отлично от нуля тогда и только тогда, когда

$$\det(A - \lambda E) = \det \begin{Vmatrix} \alpha_1^1 - \lambda & \alpha_2^1 & \dots & \alpha_n^1 \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 - \lambda & \dots & \alpha_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_1^n & \alpha_2^n & \dots & \alpha_n^n - \lambda \end{Vmatrix} = 0. \qquad (7)$$

Равенство (7), рассматриваемое как условие на λ, называется *характеристическим уравнением* матрицы A, а его корни — *характеристическими числами* матрицы A.

Разумеется, в вещественном пространстве в качестве множителей допускаются только вещественные числа, и собственные значения должны быть вещественными. В соответствии с этим имеет место

Теорема 1. *В комплексном пространстве все корни характеристического уравнения и только они являются собственными значениями. В вещественном пространстве то же справедливо для вещественных корней характеристического уравнения.*

Левая часть характеристического уравнения представляет собой многочлен степени n. Действительно, согласно формуле полного разложения (10) § 4 гл. V детерминант равен алгебраической сумме произведений, в каждое из которых входит по n элементов матрицы. Содержат λ только элементы, стоящие на главной диагонали. Существует одно произведение

$$(\alpha_1^1 - \lambda)(\alpha_2^2 - \lambda)\dots(\alpha_n^n - \lambda), \qquad (8)$$

в котором все сомножители содержат λ. Если в какое-нибудь другое произведение вошел сомножитель α_j^i $(i \neq j)$, то в него не могут войти сомножители $(\alpha_i^i - \lambda)$ и $(\alpha_j^j - \lambda)$. Поэтому каждый член суммы, кроме (8), содержит λ в степени не выше, чем $n - 2$. Раскрывая скобки в выражении (8), выпишем два члена со старшими степенями λ:

$$(-1)^n \lambda^n + (-1)^{n-1}(\alpha_1^1 + \alpha_2^2 + \dots + \alpha_n^n)\lambda^{n-1}.$$

Эти же члены будут старшими во всем многочлене. Свободный член многочлена равен его значению при $\lambda = 0$, а это значение равно $\det(A - 0E) = \det A$. Таким образом,

$$\det(A - \lambda E) = (-1)^n \lambda^n + (-1)^{n-1} \lambda^{n-1} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^i + \dots + \det A. \qquad (9)$$

Этот многочлен называется *характеристическим многочленом* матрицы A. Остальные его коэффициенты находить не будем, так как они нам не потребуются. Многочлен степени n, как известно, не может иметь больше, чем n различных корней и всегда имеет хотя бы один комплексный корень. Если мы рассматриваем вещественное пространство, то может случиться (при четной размерности), что характеристическое уравнение не имеет ни одного вещественного корня, и, следовательно, линейное преобразование не имеет собственных значений и собственных подпространств. Примером может служить поворот плоскости.

В комплексном пространстве и в вещественном пространстве нечетной размерности каждое линейное преобразование имеет хоть одно собственное значение и хоть одно собственное подпространство.

Предложение 7. *Если A и A' — матрицы линейного преобразования A в разных базисах, то характеристические многочлены этих матриц совпадают.*

Доказательство. Согласно формуле (1) мы имеем

$$\det(A' - \lambda E) = \det(S^{-1}AS - \lambda S^{-1}S) = \det S^{-1}(A - \lambda E)S =$$
$$= \det(A - \lambda E)\det S^{-1}\det S = \det(A - \lambda E).$$

Из этого предложения следует, что мы можем назвать характеристический многочлен матрицы A *характеристическим многочленом преобразования* A.

Коэффициенты характеристического многочлена являются инвариантами, связанными с преобразованием. В частности, детерминант матрицы преобразования не зависит от выбора базиса. Другим важным инвариантом является коэффициент $\alpha_1^1 + \ldots + \alpha_n^n$ при $(-\lambda)^{n-1}$, называемый *следом* матрицы или следом преобразования. Он обозначается $\operatorname{tr} A$ или $\operatorname{tr} \mathsf{A}$.

С помощью теоремы Виета из (9) нетрудно установить, что след матрицы равен сумме всех корней ее характеристического многочлена, а детерминант — произведению корней.

6. Свойства собственных подпространств. Взаимное расположение собственных подпространств описывает

Теорема 2. *Сумма собственных подпространств является прямой суммой.*

В силу предложения 5 § 2 это равносильно утверждению:

собственные векторы $x_1, \ldots, x_s$, принадлежащие попарно различным собственным значениям $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$, линейно независимы.

Для доказательства рассмотрим преобразования $\mathsf{B}_i = (\mathsf{A} - \lambda_i \mathsf{E})$ для всех $i = 1, \ldots, s$ и образы векторов $x_1, \ldots, x_s$ при этих преобразованиях. Для любых i и j имеем

$$\mathsf{B}_i(x_j) = \mathsf{A}(x_j) - \lambda_i x_j = (\lambda_j - \lambda_i)x_j. \qquad (10)$$

Таким образом, $\mathsf{B}_i(x_j) \neq o$ при $i \neq j$, а $\mathsf{B}_i(x_i) = o$. Допустим, что один из векторов раскладывается по остальным, например,

$$x_1 = \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_s x_s.$$

Подействуем на обе части равенства преобразованиями $\mathsf{B}_2, \ldots, \mathsf{B}_s$. Вектор x_1 в левой части равенства перейдет в отличный от нуля вектор $(\lambda_1 - \lambda_2)\ldots(\lambda_1 - \lambda_s)x_1$, а произвольное слагаемое $\alpha_j x_j$ $(j = 2, \ldots, s)$ в правой части равенства перейдет в

$$\alpha_j(\lambda_j - \lambda_2)\ldots(\lambda_j - \lambda_j)\ldots(\lambda_j - \lambda_s)x_j,$$

т. е. в нулевой вектор. Поэтому вся правая часть равенства перейдет в нулевой вектор. Полученное противоречие заканчивает доказательство теоремы.

Пусть λ_0 — корень многочлена $p(\lambda)$. Напомним, что *кратностью корня* λ_0 называется самое большое число s, при котором многочлен может быть представлен в виде $p(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^s p_1(\lambda)$, где $p_1(\lambda)$ — некоторый многочлен. Корни кратности 1 называются *простыми*.

Теорема 3. *Пусть собственное значение λ_0 преобразования A есть корень характеристического многочлена кратности s. Тогда размерность соответствующего собственного подпространства не превосходит s.*

Доказательство. Пусть корню λ_0 соответствует собственное подпространство размерности k. Выберем там базис $e_1, ..., e_k$ и дополним его векторами $e_{k+1}, ..., e_n$ до базиса в пространстве $\mathscr{L}$. Первые k столбцов матрицы A преобразования A в этом базисе определяются предложением 6:

$$A = \left\| \begin{array}{ccc|c} \lambda_0 & \dots & 0 & \\ \vdots & \ddots & \vdots & B \\ 0 & \dots & \lambda_0 & \\ \hline 0 & \dots & 0 & \\ \vdots & \ddots & \vdots & C \\ 0 & \dots & 0 & \end{array} \right\|.$$

Здесь B и C — какие-то подматрицы, занимающие $n - k$ столбцов.

Раскладывая детерминант матрицы $A - \lambda E$ последовательно по каждому из первых k столбцов, мы получаем

$$\det(A - \lambda E) = (\lambda_0 - \lambda)^k \det(C - \lambda E).$$

Отсюда по определению кратности $k \leqslant s$. Теорема доказана.

Собственному значению кратности s может принадлежать собственное подпространство размерности, меньшей, чем s. Например, читатель может проверить, что линейное преобразование двумерного пространства, задаваемое матрицей

$$\left\| \begin{matrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{matrix} \right\|,$$

имеет собственное значение кратности 2 и одномерное собственное подпространство.

7. Комплексные характеристические числа. Допустим, что у линейного преобразования A вещественного линейного пространства $\mathscr{L}$ характеристический многочлен имеет комплексный (не вещественный) корень λ. Поскольку коэффициенты многочлена вещественны, комплексно сопряженное число $\overline{\lambda}$ также будет корнем многочлена. Имеет место

Предложение 8. *Паре комплексно сопряженных корней характеристического многочлена преобразования A вещественного прост-*

ранства соответствует ненулевое инвариантное подпространство $\mathscr{L}'$, обладающее тем свойством, что оно не содержит собственных векторов, а через любой его вектор проходит двумерное инвариантное подпространство.

Доказательство. Числа λ и $\overline{\lambda}$ являются корнями вещественного квадратного трехчлена $t^2 + pt + q$ (в котором $p = -(\lambda + \overline{\lambda})$, а $q = \lambda\overline{\lambda}$). Рассмотрим линейное преобразование $B = A^2 + pA + qE$ и подпространство $\mathscr{L}' = \operatorname{Ker} B$. По предложению 3 $\mathscr{L}'$ инвариантно.

Докажем, что $\mathscr{L}'$ -- ненулевое подпространство. Если в некотором базисе A имеет матрицу A, то матрицей преобразования B будет $A^2 + pA + qE$. Эта матрица вещественна, но раскладывается на два комплексных множителя: $B = (A - \lambda E)(A - \overline{\lambda}E)$. Отсюда $\det B = \det(A - \lambda E)\det(A - \overline{\lambda}E) = 0$, так как $\det(A - \lambda E) = 0$, и мы видим, что ядро B ненулевое.

$\mathscr{L}'$ не содержит собственных векторов. Действительно, если для некоторого вектора x выполнено $A(x) = \mu x$, то $B(x) = \mu^2 x + p\mu x + qx = (\mu^2 + p\mu + q)x$. Так как квадратный трехчлен не имеет вещественных корней, $\mu^2 + p\mu + q \neq 0$, и поэтому из $B(x) = o$ следует $x = o$. Вектор x не может быть собственным.

Пусть теперь x — ненулевой вектор из $\mathscr{L}'$. Рассмотрим подпространство $\mathscr{L}''$ -- линейную оболочку векторов x и $A(x)$. Это подпространство инвариантно. В самом деле, пусть $y = \alpha x + \beta A(x)$ -- вектор из $\mathscr{L}''$. Тогда $A(y) = \alpha A(x) + \beta A^2(x)$. Так как $B(x) = o$, мы находим, что $A^2(x) = -pA(x) - qx$, и потому $A(y) = \alpha A(x) - \beta p A(x) - \beta q x$. Значит, $A(y)$ раскладывается по x и $A(x)$, т. е. принадлежит $\mathscr{L}'$.

Итак, линейная оболочка векторов x и $A(x)$ — инвариантное подпространство. Ясно, что его размерность не больше двух. Если бы она равнялась 1, то подпространство содержало бы собственный вектор, чего, как мы видели, быть не может. Предложение доказано.

Рассмотрим корни характеристического многочлена. Если среди них найдется вещественный, то существует собственное подпространство, а значит, и одномерное инвариантное подпространство. Если найдется не вещественный корень, то найдется двумерное инвариантное подпространство. Поэтому имеет место

Следствие. *Любое линейное преобразование ненулевого вещественного пространства имеет или одномерное, или двумерное инвариантное подпространство.*

8. Приведение матрицы преобразования к диагональному виду. Из предложения 6 вытекает

Предложение 9. *Матрица преобразования A в базисе $e_1, ..., e_n$ является диагональной тогда и только тогда, когда все базисные векторы собственные. В этом случае диагональные элементы матрицы — собственные значения.*

Для произвольного линейного преобразования может не сущест-