9. Два квадратных многочлена ax^2+bx+c и $\alpha x^2+\beta x+\gamma$, имеют общий корень. Докажите, что

$$\begin{vmatrix} a & b & c & 0 \\ 0 & a & b & c \\ \alpha & \beta & \gamma & 0 \\ 0 & \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix} = 0.$$

10. Сколько нарушений порядка в перестановке (5, 4, 3, 2, 1)?

§ 5. Системы линейных уравнений (основной случай)

1. Постановка задачи. Систему уравнений вида

$$\begin{array}{c} a_1^1x^1 + a_2^1x^2 + \ldots + a_n^1x^n = b^1, \\ a_1^2x^1 + a_2^2x^2 + \ldots + a_n^2x^n = b^2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_1^mx^1 + a_2^mx^2 + \ldots + a_n^mx^n = b^m \end{array} \qquad (1)$$

мы будем называть *системой m линейных уравнений с n неизвестными* $x^1, \ldots, x^n$. Коэффициенты этих уравнений мы будем записывать в виде матрицы

$$A = \left\| \begin{matrix} a_1^1 & a_2^1 & \ldots & a_n^1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_1^m & a_2^m & \ldots & a_n^m \end{matrix} \right\|,$$

называемой *матрицей системы*. Числа, стоящие в правых частях уравнений, образуют столбец $\mathbf{b}$, называемый *столбцом свободных членов*.

Матрица системы, дополненная справа столбцом свободных членов, называется *расширенной матрицей системы* и в этой главе обозначается A^*:

$$A^* = \left\| \begin{matrix} a_1^1 & a_2^1 & \ldots & a_n^1 & b^1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_1^m & a_2^m & \ldots & a_n^m & b^m \end{matrix} \right\|.$$

Если свободные члены всех уравнений равны нулю, то система называется *однородной*.

Определение. Совокупность n чисел $\alpha^1, \ldots, \alpha^n$ называется *решением* системы (1), если каждое уравнение системы обращается в числовое равенство после подстановки в него чисел $\alpha^1, \ldots, \alpha^n$ вместо соответствующих неизвестных $x^1, \ldots, x^n$.

Пользуясь определением линейных операций со столбцами, мы можем записать систему (1) в виде

$$x^1 \left\| \begin{matrix} a_1^1 \\ \vdots \\ a_1^m \end{matrix} \right\| + \ldots + x^n \left\| \begin{matrix} a_n^1 \\ \vdots \\ a_n^m \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} b^1 \\ \vdots \\ b^m \end{matrix} \right\|,$$

(пример 1 §1) или, короче,

$$x^1\mathbf{a}_1 + \ldots + x^n\mathbf{a}_n = \mathbf{b},$$

где $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ — столбцы матрицы системы, а $\mathbf{b}$ — столбец свободных членов. Отсюда сразу вытекает следующая интерпретация решения системы линейных уравнений.

Предложение 1. *Решение системы линейных уравнений — это совокупность коэффициентов, с которыми столбец свободных членов раскладывается по столбцам матрицы системы.*

Используя умножение матриц, можно записать систему (1) еще короче:

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

(пример 1 §2). Выбор обозначений определяется решаемой задачей.

Наша цель состоит в нахождении всех решений системы (1), причем мы не делаем заранее никаких предположений относительно коэффициентов и свободных членов системы и даже относительно числа уравнений и неизвестных. Поэтому могут представиться различные возможности. Система может вообще не иметь решения, как система

$$x^1 + x^2 = 1,$$
$$x^1 + x^2 = 0,$$

определяющая две параллельные прямые. Система может иметь бесконечное множество решений, как система ($n = 2$, $m = 1$) $x^1 + x^2 = 0$, решением которой является любая пара чисел, равных по модулю и отличающихся знаком. Примеры систем, имеющих одно-единственное решение, в изобилии встречаются в школьном курсе.

Системы, имеющие решения, называются *совместными*, а не имеющие решений — *несовместными*.

Как следствие предложения 1 и предложения 6 §1 мы получаем

Предложение 2. *Если столбцы матрицы системы линейно независимы, то система не может иметь двух различных решений: она или несовместна, или имеет единственное решение.*

Основным средством исследования и решения систем линейных уравнений для нас будут элементарные преобразования матриц. Причину этого показывает

Предложение 3. *Элементарным преобразованиям строк расширенной матрицы системы* (1) *соответствуют преобразования системы уравнений, не меняющие множества ее решений.*

Действительно, если строка матрицы A^* умножается на число $\lambda \neq 0$, то преобразованная матрица является расширенной матрицей для системы, получаемой из (1) умножением соответствующего уравнения на λ. Если в матрице i-я строка прибавляется к j-й, то в системе уравнений i-е уравнение прибавляется к j-му. В любом случае преобразованная система является следствием исходной. Но элементарные преобразования обратимы, а значит, и исходная система может быть получена из преобразованной и является ее следствием. Поэтому множества решений обеих систем совпадают.

2. Основной случай. В этом параграфе мы рассмотрим основной случай, когда число уравнений равно числу неизвестных: $m = n$. Кроме того, мы наложим определенные ограничения на коэффициенты системы. Если этого не сделать, то нам придется изучать здесь, например, и систему из одного уравнения, повторенного n раз. Мы хотим, чтобы ни одно уравнение не было следствием остальных. Для этого во всяком случае необходимо, чтобы ни одно из них не было линейной комбинацией остальных (в действительности, этого и достаточно, но мы можем не вникать сейчас в этот вопрос). В случае $m = n$ для линейной независимости уравнений необходимо потребовать, чтобы матрица системы была невырожденной, или, что то же, чтобы ее детерминант был отличен от нуля. Действительно, если одно из уравнений — линейная комбинация остальных с коэффициентами $\alpha_1, ..., \alpha_{n-1}$, то соответствующая строка расширенной матрицы есть линейная комбинация остальных строк с теми же коэффициентами. То же относится и к матрице системы.

Теорема 1. *Пусть дана система из n уравнений с n неизвестными*

$$\begin{gathered}
a_1^1 x^1 + a_2^1 x^2 + ... + a_n^1 x^n = b^1, \\
a_1^2 x^1 + a_2^2 x^2 + ... + a_n^2 x^n = b^2, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
a_1^n x^1 + a_2^n x^2 + ... + a_n^n x^n = b^n.
\end{gathered} \tag{2}$$

Если детерминант матрицы системы отличен от нуля, то система имеет решение, и притом только одно.

В самом деле, зная предложение 1, мы можем сформулировать эту теорему иначе. Пусть A — квадратная матрица порядка n и $\det A \neq 0$. Тогда любой столбец $\mathbf{b}$ высоты n раскладывается по столбцам A, и коэффициенты разложения определены однозначно. Так как отличие детерминанта от нуля равносильно невырожденности матрицы, это утверждение совпадает с теоремой 1 § 2.

3. Правило Крамера. *Правилом Крамера* называются формулы для нахождения решения системы из n уравнений с n неизвестными и детерминантом, отличным от нуля.

Для того, чтобы найти значения неизвестных, составляющие решение, выберем произвольный номер неизвестной i и рассмотрим детерминант матрицы, получаемой из матрицы системы заменой ее i-го столбца столбцом свободных членов $\mathbf{b}$:

$$\Delta^i = \det \|\mathbf{a}_1 ... \mathbf{a}_{i-1}\, \mathbf{b}\, \mathbf{a}_{i+1} ... \mathbf{a}_n\|.$$

Если $x^1, ..., x^n$ — решение, то $\mathbf{b} = x^1\mathbf{a}_1 + ... + x^n\mathbf{a}_n$, и в силу линейности детерминанта по столбцу

$$\Delta^i = x^1 \det \|\,\mathbf{a}_1 ... \mathbf{a}_{i-1}\, \mathbf{a}_1\, \mathbf{a}_{i+1} ... \mathbf{a}_n\,\| + ...$$
$$... + x^i \det \|\,\mathbf{a}_1 ... \mathbf{a}_{i-1}\, \mathbf{a}_i\, \mathbf{a}_{i+1} ... \mathbf{a}_n\,\| + x^n \det \|\,\mathbf{a}_1 ... \mathbf{a}_{i-1}\, \mathbf{a}_n\, \mathbf{a}_{i+1} ... \mathbf{a}_n\,\|.$$

Все слагаемые, кроме i-го, равны нулю, так как матрицы в них имеют по два одинаковых столбца. Поэтому $\Delta^i = x^i \det A$. Отсюда

$$x^i = \frac{\Delta^i}{\det A} \qquad (i = 1, ..., n) \tag{3}$$

Формулы Крамера при $n = 3$ мы вывели в п. 6 §4 гл. I.

4. Формулы для элементов обратной матрицы. Рассмотрим квадратную матрицу A с детерминантом, отличным от нуля. Правило Крамера позволяет получить формулы, выражающие элементы обратной матрицы A^{-1} через элементы A. Пусть $\mathbf{e}_j$ — j-й столбец единичной матрицы. Заметим, что j-й столбец A^{-1} при произвольном j равен $A^{-1}\mathbf{e}_j$. Если мы обозначим его $\mathbf{x}_j$, то $A\mathbf{x}_j = \mathbf{e}_j$. Применим правило Крамера для нахождения i-й неизвестной в решении этой системы: $x^i_j = \Delta^i / \det A$, где Δ^i — детерминант матрицы, получаемой из A заменой ее i-го столбца на j-й столбец единичной матрицы. Разлагая Δ^i по этому столбцу, мы имеем только одно слагаемое, так как в $\mathbf{e}_j$ только j-й элемент равен 1, а остальные равны нулю. Следовательно, $\Delta^i = (-1)^{i+j} d^j_i$, где d^j_i — дополнительный минор элемента a^j_i в матрице A. Подчеркнем, что этот элемент стоит в позиции, симметричной с позицией, в которой расположен вычисляемый нами элемент x^i_j. Окончательно,

$$x^i_j = \frac{(-1)^{i+j} d^j_i}{\det A}. \tag{4}$$

Формулы (4), как и правило Крамера, имеют некоторое теоретическое значение, но для численного решения систем линейных уравнений и обращения матриц применяются совсем другие методы.

Упражнения

1. Пусть числа x_1, x_2, x_3 попарно различны. Докажите, что при любых y_1, y_2, y_3 найдется единственный многочлен степени не выше двух, график которого проходит через точки с координатами (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3).

2. Пользуясь формулами (4), найдите обратную для матрицы

$$\begin{Vmatrix} a & b \\ c & d \end{Vmatrix}.$$

§ 6. Системы линейных уравнений (общая теория)

1. Условия совместности. Общие определения, касающиеся систем линейных уравнений, были введены в начале §5. Теперь мы займемся изучением систем из m уравнений с n неизвестными. Систему

$$\begin{array}{c}
a^1_1 x^1 + a^1_2 x^2 + ... + a^1_n x^n = b^1, \\
a^2_1 x^1 + a^2_2 x^2 + ... + a^2_n x^n = b^2, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
a^m_1 x^1 + a^m_2 x^2 + ... + a^m_n x^n = b^m
\end{array}$$

мы можем кратко записать в виде

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}. \tag{1}$$

Система задается своей расширенной матрицей A^*, получаемой объединением матрицы системы A и столбца свободных членов $\mathbf{b}$.

Простое и эффективное условие, необходимое и достаточное для совместности системы (1), дает следующая теорема, называемая теоремой *Кронекера–Капелли.*

Теорема 1. *Система линейных уравнений совместна тогда и только тогда, когда ранг матрицы системы равен рангу расширенной матрицы.*

Иначе утверждение теоремы можно сформулировать так: приписывание к матрице A размеров $m \times n$ столбца $\mathbf{b}$ высоты m не меняет ее ранга тогда и только тогда, когда этот столбец — линейная комбинация столбцов A.

Докажем это. Если $\operatorname{Rg} A^* = \operatorname{Rg} A$, то базисный минор A является базисным и для A^*. Следовательно, $\mathbf{b}$ раскладывается по базисным столбцам A. Мы можем считать его линейной комбинацией всех столбцов A, добавив недостающие столбцы с нулевыми коэффициентами.

Обратно, если $\mathbf{b}$ раскладывается по столбцам A, то элементарными преобразованиями столбцов можно превратить A^* в матрицу A_0, получаемую из A приписыванием нулевого столбца. Согласно предложению 2 § 3, $\operatorname{Rg} A_0 = \operatorname{Rg} A^*$. С другой стороны, $\operatorname{Rg} A_0 = \operatorname{Rg} A$, так как добавление нулевого столбца не может создать новых невырожденных подматриц. Отсюда $\operatorname{Rg} A = \operatorname{Rg} A^*$, как и требовалось.

Предложение 1. *Пусть матрица A^* приведена к упрощенному виду с помощью элементарных преобразований строк. Система* (1) *несовместна тогда и только тогда, когда в упрощенную матрицу входит строка* $\|0 \ \dots \ 0 \ 1\|$.

Доказательство. Пусть рассматриваемая система не совместна, и $\operatorname{Rg} A^* > \operatorname{Rg} A = r$. В упрощенном виде матрицы A последние $m - r$ строк — нулевые. Последний столбец матрицы A^* должен быть базисным, и в упрощенном виде матрицы A^* последний столбец — $r + 1$-й столбец единичной матрицы. Поэтому $r + 1$-я строка этой матрицы есть $\|0 \ \dots \ 0 \ 1\|$.

Обратно, если в матрице содержится такая строка, то последний столбец не может быть линейной комбинацией остальных, и система с упрощенной матрицей несовместна. Тогда несовместна и исходная система (предложение 3 § 5).

Иначе это предложение можно сформулировать так.

Следствие. *Система линейных уравнений несовместна тогда и только тогда, когда противоречивое равенство $0 = 1$ является линейной комбинацией ее уравнений.*

Равенство рангов матрицы системы и расширенной матрицы можно выразить, понимая ранг матрицы как строчный ранг. Это приведет нас к важной теореме, известной как *теорема Фредгольма.*

Транспонируем матрицу A системы (1) и рассмотрим систему из n линейных уравнений

$$\begin{aligned} a_1^1 y_1 + a_1^2 y_2 + \ldots + a_1^m y_m &= 0, \\ a_2^1 y_1 + a_2^2 y_2 + \ldots + a_2^m y_m &= 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_n^1 y_1 + a_n^2 y_2 + \ldots + a_n^m y_m &= 0 \end{aligned} \tag{2}$$

с m неизвестными, матрицей A^T и свободными членами, равными нулю. Она называется *сопряженной однородной* системой для системы (1). Если $\mathbf{y}$ — столбец высоты m из неизвестных, то систему (2) можно записать как $A^T\mathbf{y} = \mathbf{o}$, или лучше в виде

$$\mathbf{y}^T A = \mathbf{o}, \tag{3}$$

где $\mathbf{o}$ — нулевая строка длины n.

Теорема 2. *Для того чтобы система* (1) *была совместна, необходимо и достаточно, чтобы каждое решение сопряженной однородной системы* (3) *удовлетворяло уравнению*

$$\mathbf{y}^T\mathbf{b} \equiv y_1 b^1 + \ldots + y_m b^m = 0. \tag{4}$$

Доказательство. 1°. Пусть система (1) совместна, т. е. существует столбец $\mathbf{x}$ высоты n, для которого $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Тогда для любого столбца $\mathbf{y}$ высоты m выполнено $\mathbf{y}^T A\mathbf{x} = \mathbf{y}^T\mathbf{b}$. Если $\mathbf{y}$ — решение системы (3), то $\mathbf{y}^T\mathbf{b} = (\mathbf{y}^T A)\mathbf{x} = \mathbf{o}\mathbf{x} = 0$.

2°. Предположим теперь, что система (1) несовместна. Тогда согласно предложению 1 строка $\| 0 \ \ldots \ 0 \ 1 \|$ входит в упрощенный вид расширенной матрицы $A^* = \| A \mid \mathbf{b} \|$ и, следовательно, является линейной комбинацией ее строк. Обозначим коэффициенты этой линейной комбинации $y_1, \ldots, y_m$ и составим из них столбец $\mathbf{y}$. Для этого столбца

$$\mathbf{y}^T \| A \mid \mathbf{b} \| = \| 0 \ \ldots \ 0 \ 1 \|$$

(предложение 1 § 2). Это же равенство можно расписать как два: $\mathbf{y}^T A = \mathbf{o}$ и $\mathbf{y}^T\mathbf{b} = 1$. Итак, нам удалось найти решение системы (3), не удовлетворяющее условию (4). Это заканчивает доказательство.

В качестве примера применим теорему Фредгольма к выводу условия параллельности двух различных прямых на плоскости. Их уравнения составляют систему

$$A_1 x + B_1 y + C_1 = 0, \quad A_2 x + B_2 y + C_2 = 0.$$

Она не имеет решений, если существуют такие числа y_1, y_2, что $y_1 A_1 + y_2 A_2 = 0$, $y_1 B_1 + y_2 B_2 = 0$, но $y_1 C_1 + y_2 C_2 \neq 0$. Ясно, что y_1 и y_2 не равны нулю. Поэтому можно положить $\lambda = -y_2/y_1$ и записать полученное условие в виде: существует число λ такое, что $A_1 = \lambda A_2$, $B_1 = \lambda B_2$ и $C_1 \neq \lambda C_2$. В таком виде условие нам известно из предложения 7 § 2 гл. II.

2. Нахождение решений. Рассмотрим совместную систему из m линейных уравнений с n неизвестными (1). Ранг матрицы системы обозначим r. Поскольку ранг расширенной матрицы тоже равен r, мы можем считать базисный минор матрицы системы базисным минором расширенной матрицы. Элементарными преобразованиями строк приведем расширенную матрицу к упрощенному виду (предложение 6 § 3). Наша система линейных уравнений перейдет в эквивалентную ей систему из r линейно независимых уравнений.

Для удобства записи будем предполагать, что базисный минор расположен в первых r столбцах. Тогда расширенная матрица системы после отбрасывания нулевых строк примет упрощенный вид $\|E_r|A'|\mathbf{b}'\|$, а сама система

$$\|E_r|A'\|\mathbf{x} = \mathbf{b}'.$$

В развернутом виде преобразованную систему можно записать так:

$$\begin{matrix} x^1 = \beta^1 - (\alpha^1_{r+1}x^{r+1} + \ldots + \alpha^1_n x^n) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x^r = \beta^r - (\alpha^r_{r+1}x^{r+1} + \ldots + \alpha^r_n x^n). \end{matrix} \qquad (5)$$

Здесь α^i_j — элементы матрицы A', а β^i — элементы преобразованного столбца свободных членов $\mathbf{b}'$. В левых частях равенств мы оставили неизвестные, соответствующие столбцам выбранного нами базисного минора, так называемые *базисные* неизвестные. Остальные — *небазисные* — неизвестные (называемые также *параметрическими*) перенесены в правые части равенств.

Как бы мы ни задали значения параметрических неизвестных, по формулам (5) мы найдем значения базисных так, что они вместе со значениями параметрических неизвестных образуют решение исходной системы (1). Легко видеть, что так мы получим все множество ее решений. Действительно, произвольное решение системы $x^1_0, \ldots, x^r_0, x^{r+1}_0, \ldots, x^n_0$ удовлетворяет системе (5), и потому, подставляя $x^{r+1}_0, \ldots, x^n_0$ в правую часть этой системы, в левой мы получим $x^1_0, \ldots, x^r_0$, т. е. формула (5) даст именно это решение.

На формулах (5) можно было бы и остановиться, но ниже мы дадим более простое и наглядное, а также принципиально важное описание совокупности решений системы линейных уравнений.

3. Приведенная система. Сопоставим системе линейных уравнений (1) однородную систему с той же матрицей коэффициентов:

$$A\mathbf{x} = \mathbf{o}. \qquad (6)$$

По отношению к системе (1) она называется *приведенной*.

Предложение 2. *Пусть* $\mathbf{x}_0$ — *решение системы* (1). *Столбец* $\mathbf{x}$ *также будет ее решением тогда и только тогда, когда найдется такое решение* $\mathbf{y}$ *приведенной системы* (6), *что* $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{y}$.

Доказательство. Пусть $\mathbf{x}$ — решение системы (1). Рассмотрим разность $\mathbf{y} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0$. Для нее $A\mathbf{y} = A\mathbf{x} - A\mathbf{x}_0 = \mathbf{b} - \mathbf{b} = \mathbf{o}$.

Обратно, пусть $\mathbf{y}$ — решение системы (6), и $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{y}$. Тогда $A\mathbf{x} = A\mathbf{x}_0 + A\mathbf{y} = \mathbf{b} + \mathbf{o} = \mathbf{b}$.

Это предложение сводит задачу описания множества решений совместной системы линейных уравнений к описанию множества решений ее приведенной системы.

Однородная система совместна. Действительно, нулевой столбец является ее решением. Это решение называется *тривиальным.*

Пусть столбцы матрицы A линейно независимы, т. е. $\operatorname{Rg} A = n$. Тогда система (6) имеет единственное решение (предложение 2 § 5) и, следовательно, нетривиальных решений не имеет.

Предложение 3. *Если* $\mathbf{x}_1$ *и* $\mathbf{x}_2$ *— решения однородной системы, то любая их линейная комбинация — также решение этой системы.*

Доказательство. Из $A\mathbf{x}_1 = \mathbf{o}$ и $A\mathbf{x}_2 = \mathbf{o}$ для любых α и β следует $A(\alpha\mathbf{x}_1 + \beta\mathbf{x}_2) = \alpha A\mathbf{x}_1 + \beta A\mathbf{x}_2 = \mathbf{o}$.

Если однородная система имеет нетривиальные решения, то можно указать несколько линейно независимых решений таких, что любое решение является их линейной комбинацией. Сделаем это.

Определение. Матрица F, состоящая из столбцов высоты n, называется *фундаментальной матрицей* для однородной системы с матрицей A размеров $m \times n$, если

а) $AF = O$,

б) столбцы F линейно независимы,

в) каждое решение системы $A\mathbf{x} = \mathbf{o}$ раскладывается по столбцам F.

Каждый столбец фундаментальной матрицы в силу условия (а) – решение системы.

Значит, если система не имеет нетривиальных решений, то фундаментальной матрицы нет. Ниже мы докажем, что в остальных случаях она существует.

Столбцы фундаментальной матрицы называются *фундаментальной системой решений.*

Приписывая к матрице линейную комбинацию ее столбцов, мы не увеличиваем ранга матрицы. Поэтому в силу условия (в)

• ранг F максимален среди рангов матриц, удовлетворяющих условию (а).

Поэтому

• все фундаментальные матрицы имеют один и тот же ранг.

Следовательно, по условию (б)

• все фундаментальные матрицы имеют одно и то же число столбцов.

Предложение 4. *Пусть фундаментальная матрица* F *состоит из* p *столбцов. Столбец* $\mathbf{x}$ *является решением системы* $A\mathbf{x} = \mathbf{o}$ *тогда и только тогда, когда найдется такой столбец* $\mathbf{c}$ *высоты* p, *что*

$$\mathbf{x} = F\mathbf{c}. \qquad (7)$$

Доказательство. Необходимость здесь следует из условия (в) в определении, а достаточность — из равенства $A(F\mathbf{c}) = (AF)\mathbf{c} = \mathbf{0}$.

Докажем теперь, что при $\operatorname{Rg} A = r < n$ фундаментальная матрица существует. Пусть $c^1, \ldots, c^{n-r}$ — значения небазисных неизвестных. Перепишем формулы (5), учитывая, что для однородной системы $\mathbf{b}' = \mathbf{0}$:

$$\begin{array}{lcl} x^1 & = & -\alpha^1_{r+1}c^1 - \ldots - \alpha^1_n c^{n-r} \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ x^r & = & -\alpha^r_{r+1}c^1 - \ldots - \alpha^r_n c^{n-r} \\ x^{r+1} & = & \quad c^1 \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ x^n & = & \qquad\qquad c^{n-r} \end{array} \tag{8}$$

Эти равенства в матричном виде совпадают с (7), если $\mathbf{c} = \|c^1, \ldots$ $\ldots, c^{n-r}\|^T$, а в качестве F взята матрица

$$F_1 = \left\| \begin{array}{cccc} -\alpha^1_{r+1} & -\alpha^1_{r+2} & \ldots & -\alpha^1_n \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ -\alpha^r_{r+1} & -\alpha^r_{r+2} & \ldots & -\alpha^r_n \\ 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c} -A' \\ E_{n-r} \end{array} \right\|. \tag{9}$$

Таким образом, матрица (9) удовлетворяет условию (в) в определении фундаментальной матрицы.

Каков бы ни был столбец $\mathbf{c}$, произведение $F_1\mathbf{c}$ — решение. Если в качестве $\mathbf{c}$ взять j-й столбец единичной матрицы порядка $n - r$, мы увидим, что j-й столбец F_1 является решением. Это означает, что F_1 удовлетворяет условию (а): $AF_1 = O$.

Подматрица в последних $n - r$ строках — единичная. Поэтому ранг матрицы (9) равен числу столбцов, и столбцы линейно независимы.

Мы видим, что матрица (9) удовлетворяет определению фундаментальной матрицы. Итак, доказано

Предложение 5. *Если ранг матрицы однородной системы линейных уравнений r меньше числа неизвестных n, то система имеет фундаментальную матрицу из $n - r$ столбцов.*

Система столбцов (9) – фундаментальная система решений. Она называется *нормальной фундаментальной* системой решений. Каждому выбору базисных столбцов A соответствует своя нормальная фундаментальная система решений. Вообще же, имеет место

Предложение 5. *Каждая система из $n - r$ линейно независимых решений является фундаментальной.*

Действительно, матрица P, составленная из $n - r$ линейно независимых решений, удовлетворяет условиям (а) и (б). Возьмем еще произвольное решение системы (6), какую-нибудь фундаментальную матрицу F, и составим из столбцов всех матриц матрицу $V = \|F|P|\mathbf{x}\|$.

Ранг этой матрицы равен $n-r$, так как все ее столбцы — линейные комбинации столбцов матрицы F. Следовательно, столбцы матрицы P являются базисными в матрице V, и по теореме о базисном миноре столбец $\mathbf{x}$ раскладывается по столбцам P.

Это означает, что произвольное решение раскладывается по столбцам матрицы P, и последнее условие в определении фундаментальной матрицы для нее проверено.

Для нахождения матрицы (9) достаточно привести матрицу A системы к упрощенному виду, после чего нормальная фундаментальная матрица выписывается без дополнительных вычислений.

4. Общее решение системы линейных уравнений. Теперь мы можем собрать воедино наши результаты — предложения 2 и 4.

Теорема 3. *Если* $\mathbf{x}_0$ *— некоторое решение системы* (1), *а* F *— фундаментальная матрица ее приведенной системы, то столбец*

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + F\mathbf{c} \tag{10}$$

при любом $\mathbf{c}$ *является решением системы* (1). *Наоборот, для каждого ее решения* $\mathbf{x}$ *найдется такой столбец* $\mathbf{c}$, *что оно будет представлено формулой* (10).

Выражение, стоящее в правой части формулы (10), называется *общим решением* системы линейных уравнений. Если $\mathbf{f}_1, ..., \mathbf{f}_{n-r}$ — фундаментальная система решений, а $c_1, ..., c_{n-r}$ — произвольные постоянные, то формула (10) может быть написана так:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + c_1\mathbf{f}_1 + ... + c_{n-r}\mathbf{f}_{n-r}. \tag{11}$$

Теорема 3 верна, в частности, и для однородных систем. Если $\mathbf{x}_0$ — тривиальное решение, то (10) совпадает с (7).

Теорема 1 § 5 гласит, что для существования единственного решения системы из n линейных уравнений с n неизвестными достаточно, чтобы матрица системы имела детерминант, отличный от нуля. Сейчас легко получить и необходимость этого условия.

Предложение 7. *Пусть A — матрица системы из n линейных уравнений с n неизвестными. Если* $\det A = 0$, *то система либо не имеет решения, либо имеет бесконечно много решений.*

Доказательство. Равенство $\det A = 0$ означает, что $\operatorname{Rg} A < n$ и, следовательно, приведенная система имеет бесконечно много решений. Если данная система совместна, то из теоремы 3 следует, что и она имеет бесконечно много решений.

5. Пример. Рассмотрим уравнение плоскости как систему

$$Ax + By + Cz + D = 0 \tag{12}$$

из одного уравнения. Пусть $A \neq 0$ и потому является базисным минором матрицы системы. Ранг расширенной матрицы 1, значит, система совместна. Одно ее решение можно найти, положив параметрические неизвестные равными нулю: $y = z = 0$. Мы получим $x = -D/A$. Так как $n = 3$, $r = 1$, фундаментальная матрица имеет два столбца. Мы