то в силу теоремы 4 § 3 функция $\Phi(x)$ равна сумме своего ряда Фурье:

$$\Phi(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \cos kx + B_k \sin kx), \tag{1}$$

где A_k, B_k – коэффициенты Фурье функции $\Phi(x)$, в частности, $A_0 = = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \Phi(x)\,dx$. В силу теоремы о почленном дифференцировании ряда Фурье $A_k = -\frac{1}{k} b_k$, $B_k = \frac{1}{k} a_k$, что вместе с формулой (1) дает требуемое равенство. □

§ 5. Порядок убывания коэффициентов Фурье и остатка ряда Фурье. Равномерная сходимость ряда Фурье

Лемма 1. Пусть функция $f(x)$ и ее производная $f'(x)$ кусочно-непрерывны на отрезке $[-\pi, \pi]$. Тогда для коэффициентов Фурье функции f справедливы оценки: $a_k = O\left(\frac{1}{k}\right)$, $b_k = O\left(\frac{1}{k}\right)$, т. е.

$$\exists C \in \mathbb{R}: \quad \forall k \in \mathbb{N} \hookrightarrow \ |a_k| \le \frac{C}{k}, \quad |b_k| \le \frac{C}{k}.$$

Доказательство. Поскольку из кусочной непрерывности функций f и f' следует их ограниченность, то существуют числа $C_0, C_1 \in \in \mathbb{R}$ такие, что

$$|f(x)| \le C_0, \quad |f'(x)| \le C_1 \qquad \forall x \in [-\pi, \pi].$$

Пусть $x_0, \ldots, x_I \quad (-\pi = x_0 < x_1 < \cdots < x_I = \pi)$ – точки разрывов функции f. Тогда

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx\,dx = -\frac{1}{\pi k} \sum_{i=1}^{I} \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,d\cos kx =$$

$$= -\frac{1}{\pi k} \sum_{i=1}^{I} \left(f(x) \cos kx \Big|_{x=x_{i-1}+0}^{x=x_i-0} - \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} f'(x) \cos kx\,dx \right).$$

Поэтому $|b_k| \le \frac{2C_0 + 2\pi C_1}{\pi k}$, т. е. $b_k = O\left(\frac{1}{k}\right)$. Оценка $a_k = O\left(\frac{1}{k}\right)$ доказывается аналогично. □

Теорема 1. (О порядке убывания коэффициентов Фурье и остатка ряда Фурье.)

1) Пусть функция $f(x)$ и ее производные до $q-1$ порядка включительно непрерывны на отрезке $[-\pi,\pi]$ и удовлетворяют условиям $f^{(p)}(-\pi) = f^{(p)}(\pi)$ при $p = 0,1,\ldots,q-1$. Пусть производные q-го и $(q+1)$-го порядков функции f кусочно-непрерывны на $[-\pi,\pi]$. Тогда справедлива следующая оценка скорости убывания коэффициентов Фурье функции f:

$$|a_k| + |b_k| = O\left(\frac{1}{k^{q+1}}\right). \tag{1}$$

2) При этом справедлива следующая оценка скорости убывания остатка ряда Фурье $r_n(x) = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx$:

$$\sup_{x\in[-\pi,\pi]} |r_n(x)| = O\left(\frac{1}{n^q}\right).$$

3) Если функция $f^{(q)}(x)$ имеет неустранимый разрыв $(f^{(q)}(x_0-0) \neq f^{(q)}(x_0+0))$ в некоторой точке $x_0 \in (-\pi,\pi)$ или $f^{(q)}(\pi-0) \neq f^{(q)}(-\pi+0)$, то оценка (1) неулучшаема в том смысле, что

$$\forall\varepsilon>0 \hookrightarrow \ |a_k| + |b_k| \neq O\left(\frac{1}{k^{q+1+\varepsilon}}\right).$$

Доказательство. 1) Обозначим через $a_k^{(p)}$, $b_k^{(p)}$ коэффициенты Фурье функции $f^{(p)}(x)$. В силу теоремы о почленном дифференцировании ряда Фурье $a_k^{(p)} = -\frac{1}{k}b_k^{(p+1)}$, $b_k^{(p)} = \frac{1}{k}a_k^{(p+1)}$ при $p = 0,1,\ldots,q-1$, следовательно,

$$|a_k| + |b_k| = \frac{1}{k^q}(|a_k^{(q)}| + |b_k^{(q)}|). \tag{2}$$

Применяя лемму 1 к функции $f^{(q)}(x)$, получим оценки $a_k^{(q)} = O\left(\frac{1}{k}\right)$, $b_k^{(q)} = O\left(\frac{1}{k}\right)$, что вместе с равенством (2) доказывает оценку (1).

2) Из оценки (1) следует существование константы C такой, что $|a_k| + |b_k| \le \frac{C}{k^{q+1}} \quad \forall k\in\mathbb{N}$, следовательно,

$$\sup_{x\in[-\pi,\pi]} |r_n(x)| \le \sum_{k=n+1}^{\infty}(|a_k| + |b_k|) \le C \sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k^{q+1}}.$$

Интегрируя неравенство $\frac{1}{k^{q+1}} \le \frac{1}{t^{q+1}}$, справедливое при $t \in [k-1, k]$, получим неравенство $\frac{1}{k^{q+1}} \le \int\limits_{k-1}^{k} \frac{dt}{t^{q+1}}$. Следовательно,

$$\sup_{x\in[-\pi,\pi]} |r_n(x)| \le C \sum_{k=n+1}^{\infty} \int\limits_{k-1}^{k} \frac{dt}{t^{q+1}} = C \int\limits_{n}^{\infty} \frac{dt}{t^{q+1}} = \frac{C}{q}\ \frac{1}{n^q},$$

т. е. $\quad \sup\limits_{x\in[-\pi,\pi]} |r_n(x)| = O\left(\frac{1}{n^q}\right)$.

3) Третью часть теоремы докажем методом от противного. Предположим, что для некоторого числа $\varepsilon > 0$ справедлива оценка $|a_k| + |b_k| = O\left(\frac{1}{k^{q+1+\varepsilon}}\right)$. Отсюда и из равенства (2) получаем, что $|a_k^{(q)}| + |b_k^{(q)}| = O\left(\frac{1}{k^{1+\varepsilon}}\right)$, следовательно, числовой ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (|a_k^{(q)}| + |b_k^{(q)}|)$ сходится. В силу признака Вейерштрасса равномерной сходимости функциональных рядов получаем равномерную сходимость ряда Фурье $\frac{a_0^{(q)}}{2} + \sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(a_k^{(q)} \cos kx + b_k^{(q)} \sin kx\right)$ функции $f^{(q)}(x)$. Так как сумма равномерно сходящегося функционального ряда, члены которого являются непрерывными функциями, есть функция непрерывная (глава 10, § 3, теорема 2), то сумма ряда Фурье функции $f^{(q)}(x)$ непрерывна.

Если $f^{(q)}(x_0 - 0) \ne f^{(q)}(x_0 + 0)$ в некоторой точке $x_0 \in (-\pi, \pi)$ или $f^{(q)}(\pi - 0) \ne f^{(q)}(-\pi + 0)$, то в силу теоремы о сходимости ряда Фурье в точке сумма ряда Фурье функции $f^{(q)}(x)$ будет иметь разрыв в точке x_0 или в точках $\pm\pi$ соответственно. Полученное противоречие завершает доказательство третьей части теоремы. □

§ 6. Суммирование ряда Фурье методом средних арифметических

Определение. *Суммами Фейера* $\sigma_n(x)$ функции $f(x)$ называются средние арифметические сумм Фурье $S_n(x)$ функции $f(x)$:

$$\sigma_n(x) = \frac{S_0(x) + S_1(x) + \ldots + S_n(x)}{n+1}, \qquad n = 0, 1, 2, \cdots.$$

Ряд Фурье функции $f(x)$ называется *сходящимся в смысле средних арифметических*, если сходится последовательность сумм Фейера функции $f(x)$.