Теорема 4. *Для любой ограниченной односвязной области G с простой кусочно-гладкой границей Γ и для любой кусочно-непрерывной (с конечным числом точек разрыва 1-го рода) на Γ функции $u_0(\zeta)$ решение общей задачи Дирихле существует.*

Доказательство. По теореме Римана (теорема 1 § 27) существует регулярная функция $w = f(z)$, осуществляющая конформное отображение области G на круг $B_1(0)$. Пусть $z = g(w)$ — обратная функция к функции f. По принципу соответствия границ (теорема 2 § 27) функция $f(z)$ (и соответственно $g(w)$) непрерывно продолжима на границу Γ (на окружность $|w| = 1$). Поэтому и в силу кусочной непрерывности на Γ функции $u_0(\zeta)$ функция $u_0(g(\alpha))$ будет кусочно-непрерывной на окружности $|\alpha| = 1$. По этой граничной функции запишем через интеграл Пуассона функцию $\widetilde{u}(w)$, определенную в круге $|w| < 1$. Тогда по теореме 1 функция $u(z) \stackrel{\triangle}{=} \widetilde{u}(f(z))$ будет гармонической в области G. В силу теоремы 3 она ограничена и непрерывна на $G \cup \Gamma$ всюду за исключением точек разрыва функции u_0. Введем обозначение

$$\widetilde{u}_0(\alpha) \stackrel{\triangle}{=} u_0(g(\alpha)) = u_0(\zeta), \quad |\alpha| = 1, \quad \zeta \in \Gamma.$$

Запишем решение $\widetilde{u}(w)$ через интеграл Пуассона

$$\widetilde{u}(w) = \operatorname{Re} \frac{1}{2\pi i} \int_{|\alpha|=1} \widetilde{u}_0(\alpha) \frac{\alpha + w}{\alpha - w} \cdot \frac{d\alpha}{\alpha}.$$

Так как $\alpha = f(\zeta)$, $\zeta \in \Gamma$ и $w = f(z)$, $z \in G$, то, делая замену переменных α и w через ζ и z, при этом допуская, что функция $f'(z)$ также непрерывно продолжима на границу Γ, получаем формулу решения общей задачи Дирихле в области G вида

$$u(z) = \widetilde{u}(f(z)) = \operatorname{Re} \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} u_0(\zeta) \frac{f(\zeta) + f(z)}{f(\zeta) - f(z)} \cdot \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} \, d\zeta. \qquad (25)$$

■

Перейдем к исследованию простейшей *классической задачи Дирихле на круге* $B_R(0)$, где число $R > 0$. Допустим, что решение классической задачи Дирихле на круге

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & |z| < R, \\ u\big|_{|z|=R} = u_0(x,y), & \end{cases} \qquad (7)$$

существует. Более того, допустим, что существует решение задачи (7), являющееся гармонической функцией в круге $B_{R_1}(0)$ большего радиуса $R_1 > R$. Тогда, в силу теоремы 2 § 4, найдется регулярная в круге $B_{R_1}(0)$ функция f такая, что

$$\operatorname{Re} f(z) = u(x,y), \quad \forall\, z = x + iy \in B_{R_1}(0). \qquad (8)$$

Зафиксируем произвольную точку $z \in B_R(0)$, и пусть окружность $\gamma_R = \{\zeta \,\big|\, |\zeta| = R\}$ ориентирована движением против хода часовой стрелки. По интегральной формуле Коши (теорема 1 § 8)

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_R} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(\zeta)\zeta}{\zeta - z}\, d\psi, \qquad (9)$$

Доказательство. Пусть $\widetilde{\Gamma}$ то же, что и в лемме 1. Допустим, что существуют две функции $u_1(z)$ и $u_2(z)$, являющиеся ограниченными гармоническими в области G, непрерывными на множестве $G \cup \widetilde{\Gamma}$ и удовлетворяющие одному и тому же граничному условию. Определим функцию

$$w(z) = u_1(z) - u_2(z).$$

Эта функция является гармонической и ограниченной в области G, и равна нулю во всех точках множества $\widetilde{\Gamma}$. По лемме 1 получаем, что $w \equiv 0$. ■