3. Функция Жуковского. Функция

$$w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) \qquad (3)$$

называется *функцией Жуковского.*

Исследуем, каким условиям должна удовлетворять область, чтобы функция Жуковского (3) на ней была конформной.

Очевидно, что функция (3) регулярна в области $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. При этом

$$w'(z) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{z^2}\right), \quad \text{т.е.} \quad w'(z) \neq 0 \quad \text{при} \quad z \neq \pm 1.$$

В точке $z = 0$ функция w (3) имеет полюс 1-го порядка. Тогда рассмотрим функцию

$$g(z) \overset{\triangle}{=} \frac{1}{w(z)} = \frac{2z}{1+z^2}, \quad g'(z) = \frac{2-2z^2}{(1+z^2)^2}, \text{ т.е. } g'(0) = 2 \neq 0.$$

Отсюда и из определения 4 § 25 следует, что функция w конформна в точке 0.

Аналогично для проверки конформности функции w в точке ∞ достаточно рассмотреть функцию $\widetilde{g}(z) \overset{\triangle}{=} w\left(\frac{1}{z}\right)$ в точке 0. Так как $w\left(\frac{1}{z}\right) = w(z)$ и, как уже показали, функция w конформна в нуле , то по определению 3 § 25 функция w конформна в ∞.

Итак, мы показали, что функция Жуковского w конформна в каждой точке области $\overline{\mathbb{C}} \setminus \{\pm 1\}$.

Исследуем условия на область, при которых функция Жуковского будет однолистной на этой области.

Допустим, что две различные точки z_1, z_2 таковы, что $w(z_1) = w(z_2)$. Это значит, что

$$\frac{1}{2}\left(z_1 + \frac{1}{z_1}\right) = \frac{1}{2}\left(z_2 + \frac{1}{z_2}\right), \quad \text{т.е.}$$

$$(z_1 - z_2)\left(1 - \frac{1}{z_1 z_2}\right) = 0, \quad \text{т.е.} \quad z_1 z_2 = 1.$$

Таким образом, функция Жуковского однолистна в области G тогда и только тогда, когда для любого $z \in G$ следует, что $\frac{1}{z} \notin G$.

Вывод. Функция Жуковского (3) конформна на всякой области $G \subset \mathbb{C}$ такой, что $\pm 1 \notin G$ и $\forall\, z \in G \implies \frac{1}{z} \notin G$.

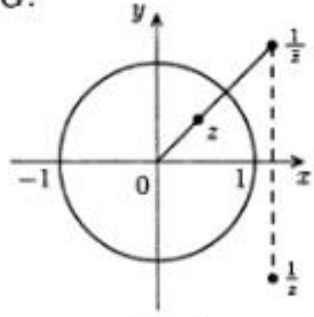

Рис. 8

Так как равенство $z_2 = \frac{1}{z_1}$ означает, что z_2 получено из z_1 суперпозицией двух симметрий (см. рис. 8) — относительно окружности $|z| = 1$ и относительно прямой $\operatorname{Im} z = 0$, то для того, чтобы функция (3) была конформна на некоторой области G, достаточно, чтобы эта область не содержала пар точек, симметричных относительно указанной окружности, или указанной прямой. Поэтому примерами областей, на которых функция Жуковского конформна, очевидно, являются четыре области:

$$1)\ \operatorname{Im} z > 0, \qquad 3)\ |z| > 1,$$
$$2)\ \operatorname{Im} z < 0, \qquad 4)\ |z| < 1.$$

Для дальнейшего изучения свойств функции Жуковского (3) воспользуемся представлением числа z в полярной форме $z = re^{i\varphi}$. Тогда функция Жуковского принимает вид

$$w = \frac{1}{2}\, re^{i\varphi} + \frac{1}{2r}\, e^{-i\varphi} = u + iv,$$

где

$$\begin{cases} u = \dfrac{1}{2}\left(r + \dfrac{1}{r}\right)\cos\varphi, \\ v = \dfrac{1}{2}\left(r - \dfrac{1}{r}\right)\sin\varphi. \end{cases} \tag{4}$$

а) Пусть дана окружность $\gamma_{r_0} \overset{\triangle}{=} \left\{z \;\middle|\; z = r_0 e^{i\varphi},\ 0 \leqslant \varphi < 2\pi\right\}$ радиуса $r_0 > 0$, где $r_0 \neq 1$. Тогда из формулы (4) получаем, что ее образ удовлетворяет уравнению

$$\frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} = 1, \tag{5}$$

где

$$a \overset{\triangle}{=} \frac{1}{2}\left(r_0 + \frac{1}{r_0}\right), \qquad b \overset{\triangle}{=} \frac{1}{2}\left|r_0 - \frac{1}{r_0}\right|, \tag{6}$$

т. е. функция Жуковского отобразит окружности γ_{r_0} и $\gamma_{\frac{1}{r_0}}$ при $r_0 \neq$ $\neq 1$ в один и тот же эллипс (5) с полуосями (6) и фокусами в точках $+1$ и -1 (так как очевидно, что $c^2 = a^2 - b^2 = 1$) (см. рис. 9).

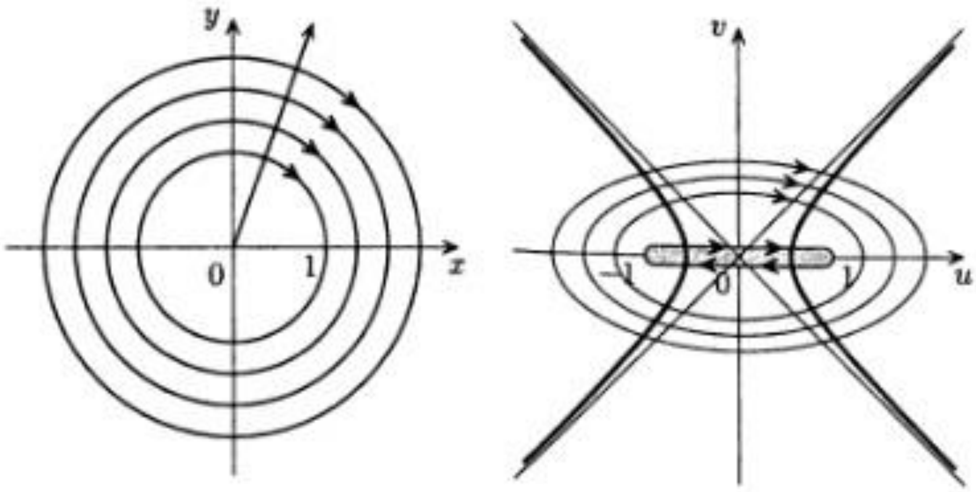

Рис. 9

б) Пусть дан луч

$$\lambda_{\varphi_0} \overset{\triangle}{=} \left\{z \;\middle|\; z = te^{i\varphi_0}, 0 < t < \infty\right\}, \quad \varphi_0 \in [0, 2\pi).$$

Вначале полагаем, что $\varphi_0 \notin \left\{0; \frac{\pi}{2}; \pi; \frac{3\pi}{2}\right\}$. По формулам (4) для образа луча λ_{φ_0} получаем выражения

$$\frac{u^2}{\cos^2\varphi_0} = \frac{1}{4}\left(t^2 + 2 + \frac{1}{t^2}\right), \qquad \frac{v^2}{\sin^2\varphi_0} = \frac{1}{4}\left(t^2 - 2 + \frac{1}{t^2}\right),$$

откуда следует,что

$$\frac{u^2}{\cos^2\varphi_0} - \frac{v^2}{\sin^2\varphi_0} = 1. \tag{7}$$

Это означает, что функция Жуковского отображает луч λ_{φ_0} на ветвь гиперболы (7), фокусы которой находятся в точках $+1$ и -1 (так как здесь $c^2 = a^2 + b^2 = \cos^2\varphi_0 + \sin^2\varphi_0 = 1$) (см. рис. 9).

Если $0 < \varphi_0 < \frac{\pi}{2}$, то из формул (4) получаем, что в образе $u > 0$, а функция v при возрастании параметра t возрастает от $-\infty$ до $+\infty$, т. е. образом луча является правая ветвь гиперболы (7) .

Если $\frac{\pi}{2} < \varphi_0 < \pi$, то из формул (4) получаем, что в образе $u < < 0$, а функция v возрастает, т. е. образом этого луча является левая ветвь гиперболы (7).

При замене φ_0 на $-\varphi_0$ из формул (4) следует, что образом луча $\lambda_{-\varphi_0}$ служит та же ветвь гиперболы, что и образом луча λ_{φ_0}, с заменой направления движения по ней на противоположное.

В заключение осталось рассмотреть образы лучей, идущих по координатным осям. Для $\varphi_0 = \pm\frac{\pi}{2}$ из формул (4) получаем, что образом каждого из лучей $\lambda_{\frac{\pi}{2}}$ и $\lambda_{-\frac{\pi}{2}}$ является мнимая ось (со взаимно противоположными направлениями обхода).

Для $\varphi_0 = 0$ образом луча λ_0 будет луч $[1, +\infty)$ с двойным обходом.

Для $\varphi_0 = \pi$ образ луча λ_π будет луч $(-\infty, -1]$ с двойным обходом.