§ 14. Приращение аргумента z вдоль контура

Пусть $z = x + iy \neq 0$. Напомним, что $\varphi \in \operatorname{Arg} z$, если выполнены равенства

$$\cos\varphi = \frac{x}{|z|}, \qquad \sin\varphi = \frac{y}{|z|}, \tag{1}$$

где $\operatorname{Arg} z = \{\varphi + 2\pi k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ — многозначная функция, определенная на $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Нас будет интересовать вопрос выделения непрерывных ветвей многозначной функции $\operatorname{Arg} z$.

Теорема 1. *Пусть $z : [0,1] \to \mathbb{C}$ — непрерывно дифференцируемая функция (т. е. класса $C^1[0,1]$), причем $z(t) \neq 0$ $\forall t \in [0,1]$. Пусть значение $\varphi_0 \in \operatorname{Arg} z(0)$ фиксировано. Тогда существует действительная функция $\varphi(\cdot) \in C^1[0,1]$, удовлетворяющая уравнениям*

$$\cos\varphi(t) = \frac{x(t)}{|z(t)|}, \qquad \sin\varphi(t) = \frac{y(t)}{|z(t)|}, \quad t \in [0,1] \tag{2}$$

и условию $\varphi(0) = \varphi_0$. Более того, эта функция единственна и задается явной формулой

$$\varphi(t) = \varphi_0 + \int_0^t \frac{xy' - yx'}{x^2 + y^2}\, d\tau. \tag{3}$$

Доказательство. Рассмотрим функцию $\varphi(t)$ из (3) и вычислим ее производную

$$\varphi'(t) = \frac{xy' - yx'}{x^2 + y^2}. \tag{4}$$

Определим функции $u(t) \triangleq \cos\varphi(t)$, $v(t) \triangleq \sin\varphi(t)$. Тогда, вычисляя их производные, получаем

$$\begin{cases} u' = -\sin\varphi(t) \cdot \varphi'(t) = -v\varphi', \\ v' = \cos\varphi(t) \cdot \varphi'(t) = u\varphi'. \end{cases} \tag{5}$$

Определим функции $\widetilde{u}(t) \triangleq \dfrac{x(t)}{|z(t)|}$ и $\widetilde{v}(t) \triangleq \dfrac{y(t)}{|z(t)|}$. Тогда

$$\begin{aligned} \widetilde{u}' &= \frac{d}{dt}\left(\frac{x}{|z|}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) = \frac{x'}{|z|} - \frac{x(xx' + yy')}{|z|^3} = \\ &= \frac{x'y^2 - xyy'}{|z|^3} = -\frac{y}{|z|} \cdot \frac{xy' - yx'}{x^2+y^2} = -\widetilde{v}\frac{xy' - yx'}{x^2+y^2}, \\ \widetilde{v}' &= \frac{d}{dt}\left(\frac{y}{|z|}\right) = \ldots = \frac{x}{|z|} \cdot \frac{xy' - yx'}{x^2+y^2} = \widetilde{u}\frac{xy' - yx'}{x^2+y^2}. \end{aligned} \tag{6}$$

В силу равенства (4) видим, что функции $(\widetilde{u}, \widetilde{v})$ удовлетворяют той же системе линейных дифференциальных уравнений (5), что и функции (u, v), причем при $t = 0$ имеем равенства $u(0) = \widetilde{u}(0)$, $v(0) =$

$= \widetilde{v}(0)$. По теореме единственности решения системы линейных дифференциальных уравнений (5) получаем $u(t) \equiv \widetilde{u}(t)$, $v(t) \equiv \widetilde{v}(t)$ при $t \in [0,1]$, т. е. справедливы равенства (2), и функция $\varphi(t)$ из (3) есть искомая.

Допустим, что существует другая непрерывно дифференцируемая функция $\varphi_1(t)$, удовлетворяющая равенствам (2) и условию $\varphi_1(0) = \varphi_0$. Тогда, дифференцируя равенства (2), получаем, в силу (5) и (6), что $\varphi_1'(\tau) = \dfrac{xy' - yx'}{x^2 + y^2}$, откуда, интегрируя эту производную по отрезку $[0,t]$ (при каждом $t \in [0,1]$), получаем в силу формулы (3), что $\varphi_1 \equiv \varphi$. ■

Замечание 1. Формулу (3) можно переписать в более компактном виде

$$\varphi(t) = \varphi_0 + \operatorname{Im} \int_0^t \frac{z'(\tau)}{z(\tau)}\, d\tau. \tag{7}$$

В самом деле, преобразовав подынтегральную в (7) функцию

$$\frac{z'}{z} = \frac{(x' + iy')(x - iy)}{x^2 + y^2} = \frac{x'x + y'y}{x^2 + y^2} + i\,\frac{y'x - yx'}{x^2 + y^2},$$

получаем из формулы (3) формулу (7).

Итак, теорема 1 обеспечивает существование непрерывно дифференцируемой ветви $\varphi(t)$ многозначной функции $\operatorname{Arg} z(t)$.

Определение 1. *Приращением аргумента функции* $z(\cdot) \in C^1[0,1]$ *на отрезке* $[0,1]$ назовем число

$$\Delta \arg z(t) \stackrel{\Delta}{=} \varphi(1) - \varphi(0) = \int_0^1 \frac{x(t)y'(t) - y(t)x'(t)}{x^2(t) + y^2(t)}\, dt = \operatorname{Im} \int_0^1 \frac{z'(t)}{z(t)}\, dt. \tag{8}$$

Теорема 2 (логарифмическое свойство). *Пусть функция* $z : [0,1] \to \mathbb{C}$ *имеет вид* $z(t) \stackrel{\Delta}{=} z_1(t)z_2(t)$, *где функции* $z_1(\cdot), z_2(\cdot) \in C^1[0,1]$, *причем* $z_1(t) \neq 0$, $z_2(t) \neq 0$ $\forall t \in [0,1]$. *Тогда справедливо равенство*

$$\Delta \arg z(t) = \Delta \arg z_1(t) + \Delta \arg z_2(t). \tag{9}$$

Доказательство. Из определения 1 (формула (8)) получаем

$$\Delta \arg z(t) = \operatorname{Im} \int_0^1 \frac{(z_1(\tau)z_2(\tau))'}{z_1(\tau) \cdot z_2(\tau)}\, d\tau = \operatorname{Im} \int_0^1 \frac{z_1'z_2 + z_2'z_1}{z_1 z_2}\, d\tau =$$

$$= \operatorname{Im} \int_0^1 \left(\frac{z_1'}{z_1} + \frac{z_2'}{z_2} \right) d\tau = \Delta \arg z_1(t) + \Delta \arg z_2(t). \quad ■$$

Определение 2. *Приращением аргумента z вдоль контура γ,* заданного параметрически с помощью функции $z(t)$, $t \in [0,1]$, назовем

$$\Delta_\gamma \arg z = \Delta \arg z(t). \tag{10}$$

Замечание 2. В определении 2 приращение аргумента z вдоль гладкого контура γ не зависит от выбора параметризации $z(t)$, с помощью которой задан этот контур γ, т. е. справедлива формула

$$\Delta_\gamma \arg z = \operatorname{Im} \int_\gamma \frac{dz}{z}. \tag{11}$$

Это следует из формул (8) и (10), а также из свойства независимости криволинейного интеграла от выбора параметризации гладкого контура (см. свойство 5° § 6).

Определение 3. Пусть в области G дано семейство контуров $\{\gamma_\alpha\}$, $\alpha \in [a,b]$, параметрически задаваемое функцией $z(t,\alpha)$, $t \in [0,1]$, у которой существует производная $z'_t(t,\alpha)$, причем функции $z(t,\alpha)$, $z'_t(t,\alpha)$ непрерывны по совокупности аргументов на $[0,1] \times [a,b]$. Говорят, что семейство $\{\gamma_\alpha\}$ задает *непрерывную деформацию гладкого контура γ_a в гладкий контур γ_b* в области G.

Замечание 3. В частном случае, когда $z(0,\alpha) \equiv z_0$, $z(1,\alpha) = z_1$ (т. е. семейство γ_α имеет неподвижные начальную и конечную точки), то получаем непрерывную деформацию контура γ_a в контур γ_b с неподвижными началом и концом (см. рис. 1). В этом случае также говорят, что кривые γ_a и γ_b *гомотопны* в области G.

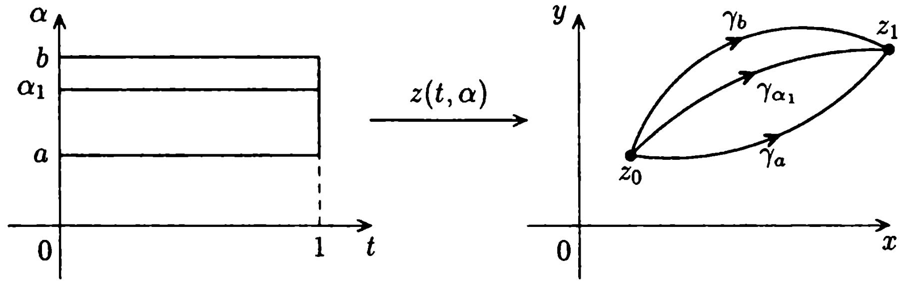

Рис. 1

Теорема 3 (устойчивость при непрерывной деформации). *Пусть семейство контуров $\{\gamma_\alpha\}$ задает непрерывную деформацию гладкого контура γ_a в гладкий контур γ_b в силу определения 3. При этом пусть $z(t,\alpha) \neq 0$ при всех $(t,\alpha) \in [0,1] \times [a,b]$. Пусть существует число $A \in \mathbb{C}$, $A \neq 0$, такое, что справедливо равенство $z(1,\alpha) = Az(0,\alpha)$ $\forall \alpha \in [a,b]$. Определим функцию от параметра $I(\alpha) \triangleq \Delta_{\gamma_\alpha} \arg z$ (т. е. $I(\alpha) = \Delta \arg z(t,\alpha)$). Тогда $I(\alpha) = \mathrm{const}$, т. е., в частности, $\Delta_{\gamma_a} \arg z = \Delta_{\gamma_b} \arg z$.*

Доказательство. При каждом фиксированном значении $\alpha \in [a,b]$ обозначим через $\varphi(t,\alpha)$ непрерывную (по t) ветвь многозначной функции $t \to \operatorname{Arg} z(t,\alpha)$, полученную в теореме 1 (см. формулу (3)). Так как

$$\varphi(1,\alpha) \in \operatorname{Arg} z(1,\alpha), \quad \varphi(0,\alpha) \in \operatorname{Arg} z(0,\alpha),$$

то

$$\varphi(1,\alpha) - \varphi(0,\alpha) \in \operatorname{Arg} \frac{z(1,\alpha)}{z(0,\alpha)},$$

и так как по условию $\frac{z(1,\alpha)}{z(0,\alpha)} \equiv A$, т. е. не зависит от α, то

$$\forall \psi_0 \in \operatorname{Arg} A \quad \exists n(\alpha) \in \mathbb{Z},$$
$$\varphi(1,\alpha) - \varphi(0,\alpha) = \psi_0 + 2\pi n(\alpha), \quad \forall \alpha \in [a,b]. \tag{12}$$

По определению 1 из равенства (12) получаем

$$I(\alpha) = \Delta \arg z(t,\alpha) = \varphi(1,\alpha) - \varphi(0,\alpha) = \psi_0 + 2\pi n(\alpha), \tag{13}$$

т. е. $I(\alpha)$ есть ступенчатая функция.

В свою очередь, из формулы (8) получаем равенство

$$I(\alpha) = \operatorname{Im} \int_0^1 \frac{z_t'(t,\alpha)}{z(t,\alpha)}\, dt.$$

В этом равенстве подынтегральная функция в стоящем справа интеграле непрерывна по (t,α) на $[0,1] \times [a,b]$, откуда следует, что интеграл непрерывно зависит от параметра α. В итоге непрерывная ступенчатая функция (13) может быть только константой. ■

Следствие 1. *В силу теоремы 3 можно определить $\Delta \arg z(t)$ (и $\Delta_\gamma \arg z$) не только для гладких, но и для непрерывных функций (и контуров).*

Покажем это. Пусть дана непрерывная функция $z : [0,1] \to \mathbb{C}$ (т. е. $z(\cdot) \in C[0,1]$) и пусть $z(t) \neq 0$ при всех $t \in [0,1]$. Определим число $r \overset{\Delta}{=} \min \{|z(t)| \mid t \in [0,1]\}$. Очевидно, что $r > 0$. Выберем $\varepsilon = r/2$. Пусть $z_\varepsilon(\cdot)$ — любая функция класса $C^1[0,1]$, аппроксимирующая данную функцию $z(\cdot)$ с точностью до $\varepsilon > 0$, т. е. $|z(t) - z_\varepsilon(t)| < \varepsilon \ \forall t \in [0,1]$, причем $z_\varepsilon(0) = z(0)$, $z_\varepsilon(1) = z(1)$. Такую функцию $z_\varepsilon(\cdot)$ будем называть *гладкой ε-аппроксимацией функции* $z(\cdot)$. Легко показать, что гладкая ε-аппроксимация $z_\varepsilon(\cdot)$ функции $z(\cdot)$ существует. Так, например, по теореме Вейерштрасса существует многочлен $P_n(\cdot)$ такой, что $|z(t) - P_n(t)| < \varepsilon/2$, $\forall t \in [0,1]$. Тогда функция

$$z_\varepsilon(t) = P_n(t) + (z(1) - P_n(1))\, t + (z(0) - P_n(0))\,(1-t)$$