Теорема 2 (о существовании первообразной). *Пусть функция $f : G \to \mathbb{C}$ непрерывна в области G. Пусть далее для каждого замкнутого кусочно-гладкого контура $\mathring{\gamma} \subset G$ справедливо равенство*

$$\int_{\mathring{\gamma}} f(z)\,dz = 0. \tag{4}$$

Тогда у функции f существует регулярная первообразная вида

$$g(z) = \int_a^z f(\zeta)\,d\zeta, \quad z \in G, \tag{5}$$

где a — произвольная фиксированная точка из G, а интеграл берется по любому кусочно-гладкому контуру в G с началом в точке a и концом в точке z.

Доказательство. Фиксируем точку $a \in G$. Докажем, что интеграл (5) не зависит от выбора контура интегрирования. В самом деле, если γ_{az} и $\widetilde{\gamma}_{az}$ — два различных кусочно-гладких контура с одинаковым началом в точке a и концом в точке z, то контур $\mathring{\gamma} = \gamma_{az} \cup \widetilde{\gamma}_{az}^{-1}$ является замкнутым контуром, лежащим в области G.

По условию теоремы справедливо равенство (4), откуда следует равенство

$$\int_{\gamma_{az}} f(\zeta)\,d\zeta = \int_{\widetilde{\gamma}_{az}} f(\zeta)\,d\zeta.$$

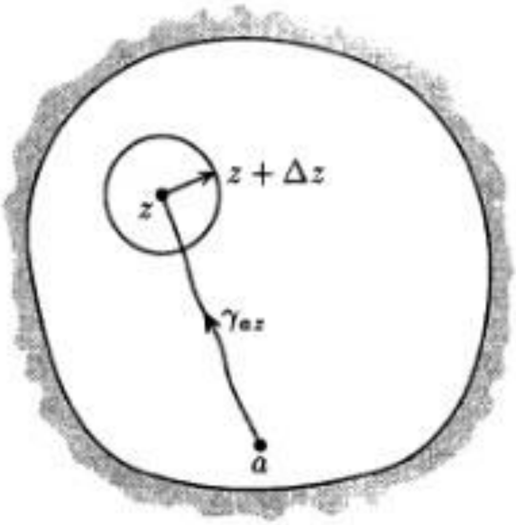

Рис. 2

Итак, интеграл (5) на самом деле есть функция концевой точки z. Покажем теперь, что эта функция $g : G \to \mathbb{C}$ из (5) есть первообразная функции f. Зафиксируем произвольную точку $z \in G$ и кусочно-гладкий контур γ_{az}, соединяющий точку a с точкой z.

Так как G — область, то существует число $r > 0$ такое, что $B_r(z) \subset G$. Для любого Δz такого, что $0 < |\Delta z| < r$, определим контур $\gamma_{a(z+\Delta z)}$ такой, что $\gamma_{a(z+\Delta z)} = \gamma_{az} \cup [z, z + \Delta z]$, где $[z, z + \Delta z]$ — прямолинейный отрезок, соединяющий концевые точки (см. рис. 2).

Вычисляя значения $g(z)$ и $g(z+\Delta z)$ через интегралы (5) по контурам γ_{az} и $\gamma_{a(z+\Delta z)}$, получаем равенство

$$\frac{g(z+\Delta z)-g(z)}{\Delta z}=\frac{1}{\Delta z}\int_z^{z+\Delta z} f(\zeta)\,d\zeta, \tag{6}$$

где интеграл справа взят по направленному отрезку $[z, z+\Delta z]$.

В силу непрерывности функции f в точке z для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, $\delta \leqslant r$, такое, что для всех $\zeta : |\zeta - z| < \delta$ справедливо неравенство $|f(\zeta) - f(z)| < \varepsilon$. Поэтому из равенства (6) при $|\Delta z| < \delta(\varepsilon)$ получаем

$$\left|\frac{\Delta g}{\Delta z} - f(z)\right| = \left|\frac{1}{\Delta z}\int_z^{z+\Delta z}(f(\zeta)-f(z))\,d\zeta\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{|\Delta z|}\int_z^{z+\Delta z}|f(\zeta)-f(z)|\,|d\zeta| < \frac{1}{|\Delta z|}\cdot\varepsilon\cdot|\Delta z| = \varepsilon. \tag{7}$$

Это означает, что существует производная $g'(z)$, причем справедливо равенство $g'(z) = f(z)$. Так как функция f непрерывна, то в итоге получаем, что функция g регулярна на области G. ■

Следствие 2. *Если область G односвязна, то у всякой регулярной функции $f : G \to \mathbb{C}$ существует ее первообразная вида* (5).

Доказательство. По теореме Коши (теорема 1 §7) в односвязной области G справедливо равенство (4), т. е. выполнены все условия теоремы 2. ■