Определение 1. *Степенным рядом* называется функциональный ряд вида

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n(z-a)^n, \tag{1}$$

где точка $a \in \mathbb{C}$ и коэффициенты $c_n \in \mathbb{C}$ фиксированы.

Теорема 1 (Абель). *Если степенной ряд* (1) *сходится в точке* $z_0 \neq a$, *то ряд* (1) *сходится абсолютно в любой точке из круга* $B_{|z_0-a|}(a)$, *а в любом замкнутом круге* $\overline{B_r(a)}$, *где* $0 < r < |z_0 - a|$, *этот ряд сходится равномерно.*

Доказательство. Так как по условию числовой ряд $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} c_n(z_0-a)^n$ сходится, то из критерия Коши следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} |c_n(z_0-a)^n| = 0$, поэтому существует число $\alpha > 0$ такое, что $|c_n(z_0-a)^n| \leqslant \alpha$ для всех n.

1) Пусть точка $z \in B_{|z_0-a|}(a)$. Тогда $|c_n(z-a)^n| = |c_n(z_0-a)^n| \cdot \left|\frac{z-a}{z_0-a}\right|^n \leqslant \alpha q_z^n$, где $q_z \overset{\triangle}{=} \left|\frac{z-a}{z_0-a}\right| < 1$. Так как числовой ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q_z^n$ очевидно сходится, то по признаку сравнения ряд (1) сходится и абсолютно в точке z.

2) Определим $q_0 \overset{\triangle}{=} \frac{r}{|z_0-a|}$. Аналогично пункту 1 получаем оценку: $|c_n(z-a)^n| \leqslant \alpha q_0^n$ для всех $z \in \overline{B_r(a)}$. Так как числовой ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q_0^n$ очевидно сходится, то по признаку Вейерштрасса (см. утверждение 6 § 2) ряд (1) сходится равномерно на круге $\overline{B_r(a)}$. ■

Эта теорема 1 позволяет получить представление об области сходимости степенного ряда (1).

Определим для степенного ряда (1) понятие *радиуса сходимости*:

$$R \overset{\triangle}{=} \sup\Big\{|z-a| \;\Big|\; \sum_{n=0}^{+\infty} c_n(z-a)^n \text{ сходится}\Big\}. \tag{2}$$

Тогда, если $0 < R < +\infty$, то в силу теоремы 1 Абеля в каждой точке круга $B_R(a)$ ряд (1) сходится, а в каждой точке $z \notin \overline{B_R(a)}$ ряд (1) расходится. Круг $B_R(a)$ называется *кругом сходимости ряда* (1).

Радиус сходимости R степенного ряда (1) может быть вычислен по известной *формуле Коши–Адамара*

$$R = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n|}}. \tag{3}$$

Определение 2. Пусть у функции $f : B_r(a) \to \mathbb{C}$ существуют в точке a производные $f^{(n)}(a)$ любого порядка $n \in \mathbb{N}$. Тогда степенной ряд вида

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n \tag{4}$$

называется *рядом Тейлора функции* f с центром в точке a.

Теорема 2. *Если функция f регулярна в круге $B_r(a)$, где $a \in \in \mathbb{C}$, $r > 0$, то она представима в этом круге $B_r(a)$ в виде суммы сходящегося ряда Тейлора, т. е.*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n, \quad \forall\, z \in B_r(a), \tag{5}$$

где

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}. \tag{6}$$

Доказательство. Фиксируем произвольную точку $z \in \in B_r(a)$. Тогда существует число $r_1 > 0$ такое, что $|z-a| < r_1 < r$.

Пусть $\gamma_{r_1} \triangleq \{\zeta \mid |\zeta - a| = r_1\}$ — ориентированная движением против хода часовой стрелки окружность (см. рис. 1). Запишем интегральную формулу Коши:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{r_1}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta. \tag{7}$$

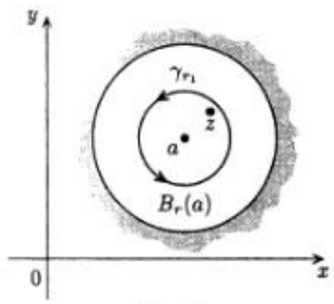

Рис. 1

Преобразуем функцию $\zeta \to \frac{1}{\zeta - z}$, где $\zeta \in \gamma_{r_1}$, к виду

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{(\zeta - a) - (z - a)} = \frac{1}{(\zeta - a)\left(1 - \frac{z-a}{\zeta - a}\right)}.$$

Здесь $\left|\frac{z-a}{\zeta-a}\right| = \frac{|z-a|}{r_1} \triangleq q$, $q < 1$. Как и в примере 1, получаем разложение в сходящийся ряд

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - a}\left(1 + \frac{z-a}{\zeta-a} + \left(\frac{z-a}{\zeta-a}\right)^2 + \ldots\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z-a)^n}{(\zeta-a)^{n+1}}.$$

В итоге, подынтегральная функция в (7) представима сходящимся на γ_{r_1} рядом

$$\frac{f(\zeta)}{\zeta - z} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z-a)^n}{(\zeta-a)^{n+1}} f(\zeta), \quad \forall \zeta \in \gamma_{r_1}. \tag{8}$$

Так как справедлива оценка

$$\left|\frac{(z-a)^n}{(\zeta-a)^{n+1}} f(\zeta)\right| \leqslant \frac{M}{r_1} \cdot q^n, \quad \text{где} \quad M = \sup_{\zeta \in \gamma_{r_1}} |f(\zeta)| < +\infty,$$

а ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n$ сходится, то по признаку Вейерштрасса функциональный ряд (8) сходится равномерно на окружности γ_{r_1}. Поэтому в силу теоремы 2 из §6 ряд (8) можно почленно интегрировать по окружности γ_{r_1}. В результате получаем равенство

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{r_1}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}\, d\zeta \cdot (z-a)^n, \tag{9}$$

т. е. степенной ряд вида (1) с коэффициентами

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{r_1}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}\, d\zeta. \tag{10}$$

Эти коэффициенты c_n не зависят от выбора точки z или окружности γ_{r_1}, так как, воспользовавшись формулой для производной (11) из § 8, получаем для c_n формулу (6). Таким образом, ряд (9) есть ряд Тейлора функции f. В силу произвольности $z \in B_r(a)$ ряд (9) сходится в круге $B_r(a)$, а поэтому его радиус сходимости $R \geqslant r$. ■

Следствие 1. *Пусть функция f регулярна в области G и пусть выбрана точка $a \in G$. Тогда функция f представима в виде ряда Тейлора*

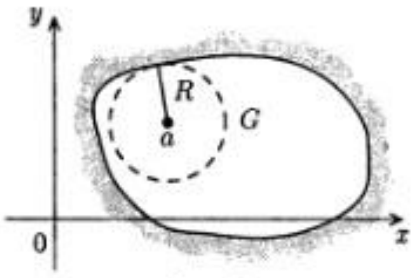

Рис. 2

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n,$$

который сходится по крайней мере в круге $B_R(a)$ максимального радиуса $R > 0$, при котором этот круг содержится в области G (см. рис. 2).

Теорема 1 (единственности). *Пусть функция $f: G \to \mathbb{C}$ регулярна в области $G \subset \mathbb{C}$. Пусть существует последовательность различных точек $\{z_n\} \subset G$, сходящаяся к некоторой точке $a \in G$ и такая, что $f(z_n) = 0\ \forall n \in \mathbb{N}$. Тогда $f(z) \equiv 0$ на области G.*

Доказательство. 1) Пусть Γ — граница области G и число $\rho_0 \overset{\triangle}{=} \operatorname{dist}(a, \Gamma)$ — расстояние от точки a до границы Γ. Тогда очевидно, что $0 < \rho_0 \leqslant +\infty$. Так как функция f регулярна на круге $B_{\rho_0}(a) \subset G$, то по теореме 1 из § 9 функция f представима в этом круге в виде сходящегося ряда Тейлора

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z-a)^n. \tag{1}$$

Покажем, что коэффициенты $c_n = 0$ при всех $n = 0, 1, \ldots$. Допустим противное. Пусть найдется коэффициент $c_m \neq 0$, при этом $m \geqslant 1$ (так как в силу непрерывности f в точке a из условия теоремы следует, что $f(a) = 0$). Тогда ряд (1) принимает вид

$$f(z) = (z-a)^m \left(c_m + c_{m+1}(z-a) + \ldots\right), \tag{2}$$

т. е. функцию f можно переписать в виде

$$f(z) = (z-a)^m h(z), \tag{3}$$

где функция h как сумма сходящегося степенного ряда (в силу следствия 2 § 9) регулярна в круге $B_{\rho_0}(a)$, причем $h(a) = c_m \neq 0$. В силу этого и в силу непрерывности h существует число $r_0 \in (0, \rho_0)$ такое, что $h(z) \neq 0\ \forall z \in B_{r_0}(a)$. Так как $(z-a)^m \neq 0\ \forall z \in \overset{\circ}{B}_{r_0}(a)$, то из равенства (3) получаем, что $f(z) \neq 0$ при всех $z \in \overset{\circ}{B}_{r_0}(a)$. Но это противоречит условию, согласно которому $f(z_n) = 0$, причем $z_n \in \overset{\circ}{B}_{r_0}(a)$ при достаточно больших n. Следовательно, все коэффициенты $c_n = 0$ в ряде (1), а потому $f(z) \equiv 0$ на круге $B_{\rho_0}(a)$.

2) Докажем, что $f(b) = 0$ в произвольной точке $b \in G \setminus B_{\rho_0}(a)$. Соединим точки a и b произвольным кусочно-гладким контуром $\gamma \subset G$.

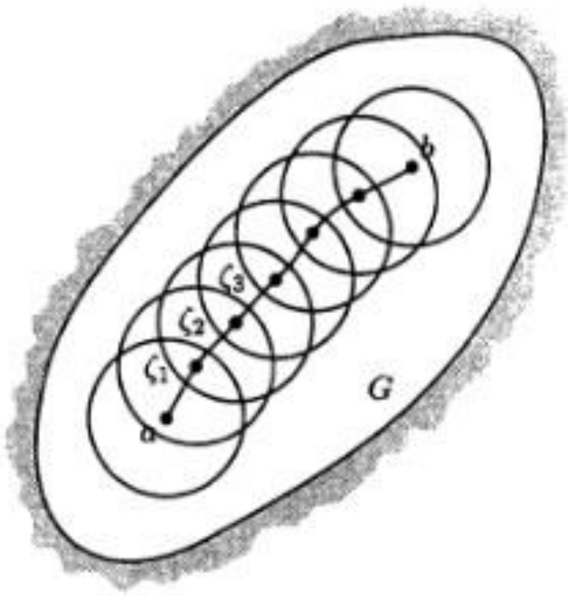

Рис. 1

Пусть $\rho \overset{\triangle}{=} \operatorname{dist}(\gamma, \Gamma)$. Очевидно, что $\rho > 0$, $\rho \leqslant \rho_0$. Легко можно указать конечное множество кругов $B_0, B_1, \ldots, B_m$ одинакового радиуса $\rho > 0$ таких, что $B_k \overset{\triangle}{=} B_\rho(\zeta_k)$, где все центры ζ_k лежат на кривой γ, причем $\zeta_0 = a$, $\zeta_m = b$, и справедлива оценка $|\zeta_k - \zeta_{k-1}| \leqslant \leqslant \rho/2 \ \ \forall k \in \overline{1,m}$. По построению очевидно включение $\zeta_{k+1} \in \in B_k \cap B_{k+1}$ для всех $k \in \overline{0, m-1}$ (см. рис. 1).

Так как $\rho_0 \geqslant \rho$, то по доказанному в пункте 1 функция $f(z) = 0$ на круге $B_0 = B_\rho(a)$.

Рассмотрим функцию f на круге B_1. Так как $f(z) = 0$ при всех $z \in B_0 \cap B_1$, и так как очевидно существует нестационарная последовательность $\{z_n^1\} \subset B_0 \cap B_1$ такая, что $z_n^1 \to \zeta_1$ при $n \to \infty$, т.е. $f(z_n^1) = 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$, то отсюда аналогично пункту 1) следует, что $f(z) \equiv 0$ в круге B_1. Продолжая аналогичные рассуждения из того, что $f(z) \equiv 0$ в круге B_{k-1}, получим, что $f(z) \equiv 0$ в круге B_k при любом $k \in \overline{1,m}$, что в итоге и дает равенство $f(b) = 0$. ■

Следствие 1. *Пусть даны область G и множество $E \subset G$, содержащее последовательность различных точек, сходящуюся к точке из G. Пусть функции f и $g : G \to \mathbb{C}$ регулярны в области G и $f(z) = g(z)$ при всех $z \in E$. Тогда $f \equiv g$ в области G.*

Доказательство. Введем функцию $h(z) \overset{\triangle}{=} f(z) - g(z)$, она регулярна в области G и по условию $h(z) = 0 \ \forall z \in E$. Тогда по теореме 1 функция $h(z) \equiv 0$ на G, что и влечет требуемое равенство. ■

Замечание 1. Утверждение теоремы 1 может оказаться несправедливым, если $a \notin G$. Например, рассмотрим функцию $f(z) = \sin\frac{1}{z}$ в $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Она регулярна, а при $z_n = \frac{1}{2\pi n}$ функция $f(z_n) = 0$, но очевидно, что $\sin\frac{1}{z} \not\equiv 0$ в $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.