1. В геометрии масс изучаются только инерционные характеристики и распределение масс в механической системе и твердом теле. Само движение системы материальных точек и твердого тела не исследуется.
2. $J_x = \sum m_i \left(y_i^2 + z_i^2 \right)$ - осевой момент инерции (другие по аналогии). $J_{xy} = \sum m_i x_i y_i$ - центробежный момент инерции (другие по аналогии).
3. Момент инерции твердого тела относительно оси u: $J_u = \sum m_i r_i^2$, Где r_i - расстояние от i-той точки до оси u. Орт $\vec{e}\left(\alpha, \beta, \gamma\right)$ задается направляющими косинусами:
   $\alpha = \cos\angle\left(x,u\right), \beta = \cos\angle\left(y,u\right), \gamma = \cos\angle\left(z,u\right)$
   $J_u = J_x\alpha^2 + J_y\beta^2 + J_z\gamma^2 - 2J_{xy}\alpha\beta - 2J_{xz}\alpha\gamma - 2J_{yz}\beta\gamma$. Естественно желание записать выражение наиболее просто. $J_u = \vec{e}^T \begin{Vmatrix} J_x & -J_{xy} & -J_{xz} \\ -J_{xy} & J_y & -J_{yz} \\ -J_{xz} & -J_{yz} & J_z \end{Vmatrix} \vec{e}$.Эта симметрическая матрица определяет тензор инерции тела. Ось называется главной, если ее центробежные моменты инерции равны нулю. Например, ось x главная, если $J_{xy} = J_{xz} = 0$. В главных осях ξ, η, ζ:
   $J_u = J_\xi\alpha^2 + J_\eta\beta^2 + J_\zeta\gamma^2$. Главные оси – это оси симметрии эллипсоида инерции. Для того чтобы построить эллипсоид инерции, возьмем на оси u точку N такую, что $\overrightarrow{ON} = \dfrac{\vec{e}}{\sqrt{J_u}}$.
   Точка N все время движения будет находиться на поверхности эллипсоида инерции:
   $J_x x^2 + J_y y^2 + J_z z^2 - 2J_{xy}xy - 2J_{xz}xz - 2J_{yz}yz = 1$
4. ↑↑↑
5. Задача поиска главных осей сводится к поиску условного экстремума функции методом Лагранжа: $J_u = f\left(\alpha, \beta, \gamma\right)$ при условии $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$. $\varphi = J_u\left(\alpha, \beta, \gamma\right) - \lambda\left(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - 1\right)$.
   $\dfrac{\partial\varphi}{\partial\alpha} = \dfrac{\partial\varphi}{\partial\beta} = \dfrac{\partial\varphi}{\partial\gamma} = 0 \Rightarrow \begin{Vmatrix} J_x & -J_{xy} & -J_{xz} \\ -J_{xy} & J_y & -J_{yz} \\ -J_{xz} & -J_{yz} & J_z \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{Vmatrix} - \lambda \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{Vmatrix} = 0$. Система имеет нетривиальное решение если $\det\left\| J - \lambda E \right\| = 0$. Раскрывая определитель, получаем полином третьей степени. Этот полином имеет три действительных корня, т.к. тензор J симметрический с действительными компонентами. Значения λ_i совпадают с главными моментами инерции в выбранной точке O. Далее находим α, β, γ для λ_i, что дает направление главной оси в $Oxyz$.Направления главных осей можно также найти из условия коллинеарности вектора нормали к поверхности эллипсоида инерции с радиусом-вектором $\vec{R}$ точки эллипсоида, лежащей на главной оси: $gradJ\left(x, y, z\right) = \lambda\vec{R}$.
6. Для точек пластины пренебрежимо малой толщины моменты инерции связаны равенством $J_\xi + J_\eta = J_\zeta$, где ось $O\zeta$ перпендикулярна плоскости пластины (для пространственной фигуры сумма моментов инерции относительно двух осей инерции всегда больше момента инерции относительно третьей, $J_\xi + J_\eta > J_\zeta, J_\xi + J_\zeta > J_\eta, J_\zeta + J_\eta > J_\xi$
7. $\vec{\omega} = p\vec{i} + q\vec{j} + r\vec{k}$ - разложение угловой скорости по базису главных осей. $\vec{K}_O = \hat{J}_O\vec{\omega}$, а значит, $\vec{K}_O = Ap\vec{i} + Bq\vec{j} + Cr\vec{k}$, где A, B, C - осевые моменты инерции. $\vec{K}_O \square \vec{\omega}$, когда $\vec{\omega} \square$ одной из

главных осей. $T=\frac{1}{2}\vec{\omega}_a^T\hat{J}_O\vec{\omega}_a=\frac{1}{2}\left(Ap^2+Bq^2+Cr^2\right)$. Либо по теореме Кенига:

$T=\frac{1}{2}m\upsilon_C^2+\frac{1}{2}\left(A_C p^2+B_C q^2+C_C r^2\right)$.

8. $\frac{d\vec{K}_O}{dt}=\vec{M}_O^{внеш}$, $\vec{K}_O=Ap\vec{i}+Bq\vec{j}+Cr\vec{k}$, $\frac{d'\vec{K}_O}{dt}=A\dot{p}\vec{i}+B\dot{q}\vec{j}+C\dot{r}\vec{k}=\hat{J}_O\vec{\varepsilon}$ - относительная скорость конца вектора кинетического момента, называют локальной производной.

$\frac{d\vec{i}}{dt}=\left[\vec{\omega},\vec{i}\right],\frac{d\vec{j}}{dt}=\left[\vec{\omega},\vec{j}\right],\frac{d\vec{k}}{dt}=\left[\vec{\omega},\vec{k}\right]$. $\frac{d'\vec{K}_O}{dt}+\left[\vec{\omega},\vec{K}_O\right]=\vec{M}_O$ - - векторная запись динамических уравнений Эйлера. $\vec{\varepsilon}=\frac{d\left(\omega\vec{\omega}_0\right)}{dt}=\frac{d\left(p\vec{i}+q\vec{j}+r\vec{k}\right)}{dt}=\dot{p}\vec{i}+\dot{q}\vec{j}+\dot{r}\vec{k}+\left[\vec{\omega},\vec{\omega}\right]=\dot{p}\vec{i}+\dot{q}\vec{j}+\dot{r}\vec{k}$

$\left[\vec{\omega},\vec{K}_O\right]=\det\begin{Vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ p & q & r\\ Ap & Bq & Cr\end{Vmatrix}\Rightarrow\boxed{\begin{cases}A\dot{p}+\left(C-B\right)qr=M_\xi\\ B\dot{q}+\left(A-C\right)pr=M_\eta\\ C\dot{r}+\left(B-A\right)qp=M_\zeta\end{cases}}$ - Динамические уравнения Эйлера.

Записываются в главных осях, реализуется движение относительно неподвижных осей

9. $\frac{d'\vec{K}_O}{dt}=A\dot{p}\vec{i}+B\dot{q}\vec{j}+C\dot{r}\vec{k}=\hat{J}_O\vec{\varepsilon}$ $\frac{d'\vec{K}_O}{dt}=A\dot{p}\vec{i}+B\dot{q}\vec{j}+C\dot{r}\vec{k}=\hat{J}_O\vec{\varepsilon}$ - относительная скорость конца вектора кинетического момента, называют локальной производной (выражает изменение во времени вектора и в фиксированной точке пространства)

10. Динамические реакции – это добавки к статическим, возникшие вследствие вращения.

$$\boxed{\begin{cases}m\vec{W}_C=\vec{R}^\partial\\ \left[\vec{\omega},\vec{K}_O\right]=\vec{M}_O^\partial\end{cases}}$$

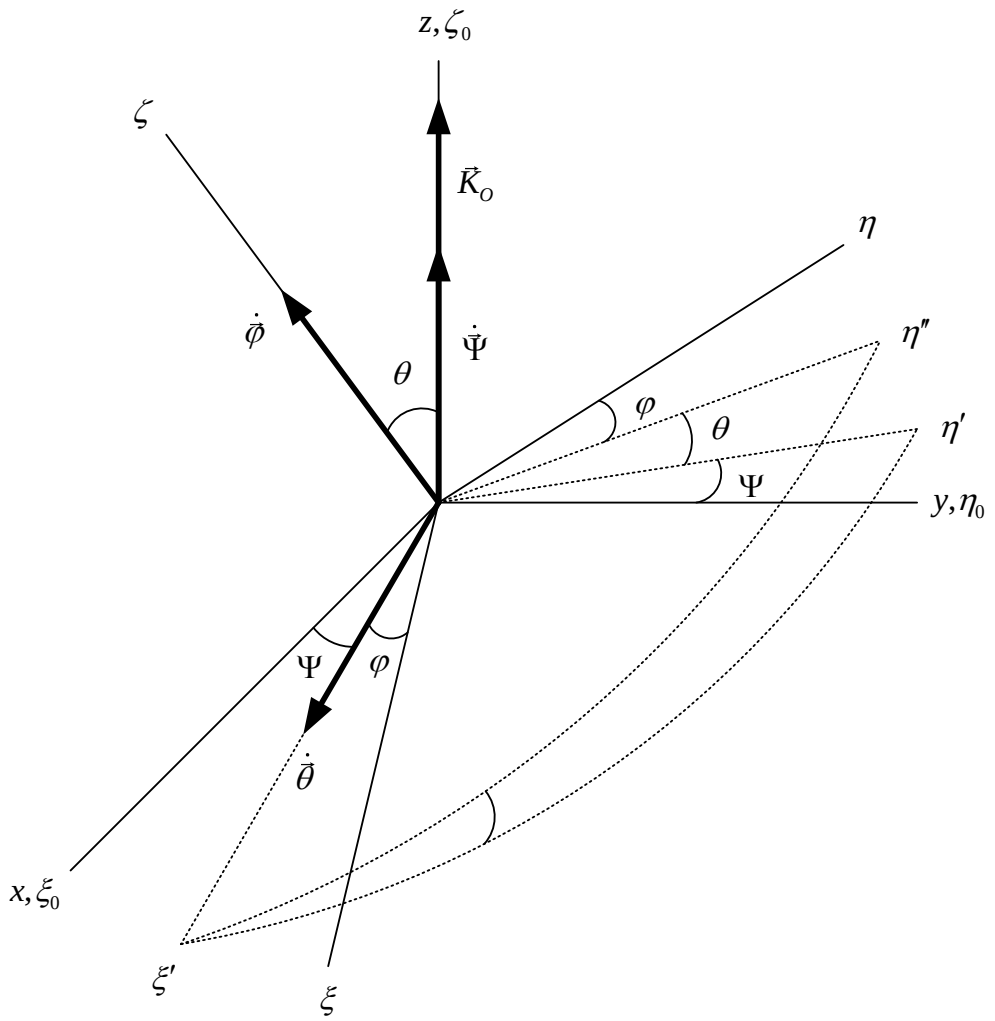
11. Чтобы система сил была эквивалентна нулю, нужно, чтобы центр масс C был на оси вращения ($\vec{W}_C=\vec{0}$) и ось вращения была главной центральной осью ($\vec{\omega}\square\vec{K}_O$). Такую ось, где отсутствуют динамические реакции, называют осью свободного вращения

12. Матрицей поворота (или матрицей направляющих косинусов) называется ортогональная матрица, которая используется для выполнения собственного ортогонального преобразования в евклидовом пространстве. При умножении матрицы поворота на вектор длина вектора сохраняется, при этом определитель матрицы поворота положителен (и равен 1). Вращение вокруг оси x: $M_x(\alpha)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha\\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}$ Вращение вокруг оси y: $M_y(\alpha)=\begin{pmatrix}\cos\alpha & 0 & \sin\alpha\\ 0 & 1 & 0\\ -\sin\alpha & 0 & \cos\alpha\end{pmatrix}$. Вращение вокруг оси z: $M_z(\alpha)=\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha & 0\\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

$M(\alpha,\beta,\gamma)=M_z(\alpha)\cdot M_x(\beta)\cdot M_z(\gamma)$ Последовательные повороты около осей Z, X', Z'' на угол прецессии (α), угол нутации (β) и на угол собственного вращения (γ) приводят к следующему выражению для матрицы поворота:

$$M(\alpha,\beta,\gamma)=\begin{pmatrix}\cos\alpha\cos\gamma-\sin\alpha\cos\beta\sin\gamma & -\cos\alpha\sin\gamma-\sin\alpha\cos\beta\cos\gamma & \sin\alpha\sin\beta\\ \sin\alpha\cos\gamma+\cos\alpha\cos\beta\sin\gamma & -\sin\alpha\sin\gamma+\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma & -\cos\alpha\sin\beta\\ -\sin\beta\sin\gamma & \sin\beta\cos\gamma & \cos\beta\end{pmatrix}$$ (W)

На катринке Ψ - угол прецессии, θ - угол нутации, φ - угол собственного вращения.



13. $\vec{\omega} = \dot{\vec{\Psi}} + \dot{\vec{\theta}} + \dot{\vec{\varphi}}$. Ось z выбрана так, что $z \square \vec{K}_O$. Тогда система уравнений Эйлера:

$$\boxed{\begin{cases} \left.\begin{aligned} p &= \dot{\Psi}\sin\theta\sin\varphi + \dot{\theta}\cos\varphi \\ q &= \dot{\Psi}\sin\theta\cos\varphi - \dot{\theta}\sin\varphi \\ r &= \dot{\Psi}\cos\theta + \dot{\varphi} \end{aligned}\right\} - \textit{кинематические_уравнения_Эйлера} \\ \left.\begin{aligned} A\dot{p} + (C-B)qr &= M_\xi \\ B\dot{q} + (A-C)pr &= M_\eta \\ C\dot{r} + (B-A)rp &= M_\zeta \end{aligned}\right\} - \textit{динамические_уравнения_Эйлера} \end{cases}}$$

14. Эта система полностью описывает движение твердого тела с неподвижной точкой. Она может быть решена в квадратурах[1] для любого твердого тела при любых начальных условиях только в трех случаях, названными случаями Эйлера ($\vec{M}_O = \vec{0}$,т.е. $\vec{K}_O = const$, то есть движение происходит по инерции), Лагранжа (это движение динамически симметричного твердого тела (A=B) с одной неподвижной точкой в поле тяжести, причем центр масс не совпадает с неподвижной точкой, центр тяжести и неподвижная точка лежат на оси симметрии, $\vec{M}_O \neq \vec{0}$) и Ковалевской (более жесткие ограничения на свойства симметрии: A=B=2C, внешней силой также является вес, но центр тяжести может быть

[1] КВАДРАТУРА – операция нахождения, вычисления интеграла.

расположен где угодно в экваториальной плоскости эллипсоида инерции для неподвижной точки) (A199)

15.

Приступая к изучению движения твердого тела с неподвижной точкой по инерции (случай Эйлера), рассмотрим отдельно движение тела, у которого $A \neq B$, и движение тела в случае, когда $A = B$, т. е. когда эллипсоид инерции для неподвижной точки является эллипсоидом вращения. В случае $A = B$ мы будем говорить, что тело обладает *динамической симметрией*. Динамическая симметрия всегда имеет место у однородных тел вращения, но может случиться, что тело не является телом вращения, однако $A = B$, т. е. имеет место динамическая симметрия.

1. Общий случай $A \neq B$ (отсутствие динамической симметрии). В случае Эйлера главный момент $\boldsymbol{M}_O$ приложенных сил относительно неподвижной точки равен нулю, и поэтому

$$M_\xi = 0, \quad M_\eta = 0, \quad M_\zeta = 0; \tag{63}$$

система уравнений (60) становится автономной и может быть решена отдельно от системы (53). Но в этом случае мы располагаем двумя первыми интегралами уравнений движения, которые получаются в силу двух законов сохранения: закона сохранения кинетического момента и закона сохранения кинетической энергии. Действительно, поскольку $\boldsymbol{M}_O = 0$, из теоремы об изменении кинетического момента получаем

$$\boldsymbol{K}_O = \boldsymbol{K}_0 = \text{const}.$$

С другой стороны, элементарная работа всех приложенных сил равна нулю, т. е. $\delta A = 0$, а значит, $dT = 0$ [1]), т. е.

$$T = T_0 = \text{const}.$$

Из того факта, что при движении твердого тела по инерции вектор кинетического момента не меняется, следует, в частности, что не меняется и квадрат модуля этого вектора:

$$K_0^2 = \text{const}.$$

В связи с тем, что оси, связанные с телом, направлены по главным осям инерции для неподвижной точки, имеем

$$K_\xi = Ap, \quad K_\eta = Bq, \quad K_\zeta = Cr,$$

поэтому

$$A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2 = K_0^2 = \text{const}. \tag{64}$$

С другой стороны, в этом случае

$$\frac{1}{2}Ap^2 + \frac{1}{2}Bq^2 + \frac{1}{2}Cr^2 = T = T_0 = \text{const}. \tag{65}$$

[1]) Это можно получить непосредственно из уравнений Эйлера (60). Положив в этих уравнениях $M_\xi = M_\eta = M_\zeta = 0$, умножив первое уравнение на p, второе на q, а третье — на r и сложив результаты, получим

$$Ap\dot{p} + Bq\dot{q} + Cr\dot{r} = 0,$$

или

$$d(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2)/dt = 0, \text{ т. е. } T = T_0 = \text{const}.$$

Из равенства $T = T_0 = \text{const}$ вытекает, между прочим, что вектор $\boldsymbol{\varepsilon}$ перпендикулярен вектору $\boldsymbol{K}_0$, т. е. $\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{K}_0 = 0$.

Действительно проекция вектора $\boldsymbol{K}_0$ на оси, связанные с телом, равны Ap, Bq, Cr, а проекция вектора $\boldsymbol{\varepsilon}$ равны $\dot{p}$, $\dot{q}$, $\dot{r}$, так как

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = \left(\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}\right)' + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} = \left(\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}\right)'.$$

Следовательно,

$$\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{K}_0 = Ap\dot{p} + Bq\dot{q} + Cr\dot{r} = \frac{d}{dt}\left(\frac{Ap^2 + Bq^2 + Cr^2}{2}\right) = \frac{dT}{dt} = 0.$$

Верно и обратное утверждение: если при движении твердого тела (не обязательно в случае Эйлера!) $\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{K}_O = 0$, то при этом движении $T = T_0 = \text{const}$.

Перенося в выражениях (64) и (65) члены, содержащие r, в правую часть равенства, получаем систему алгебраических уравнений относительно двух неизвестных p^2 и q^2:

$$Ap^2 + Bq^2 = 2T_0 - Cr^2,$$
$$A^2p^2 + B^2q^2 = K_0^2 - C^2r^2.$$

Рассматривается случай $A \neq B$. Поэтому определитель этой системы алгебраических уравнений (относительно p^2 и q^2)

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ A^2 & B^2 \end{vmatrix} = AB(B - A)$$

отличен от нуля, так что ее можно решить, например, по правилу Крамера:

$$p^2 = \frac{\begin{vmatrix} 2T_0 - Cr^2 & B \\ K_0^2 - C^2r^2 & B^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A & B \\ A^2 & B^2 \end{vmatrix}}, \quad q^2 = \frac{\begin{vmatrix} A & 2T_0 - Cr^2 \\ A^2 & K_0^2 - C^2r^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A & B \\ A^2 & B^2 \end{vmatrix}}, \tag{66}$$

или

$$\begin{aligned} (B - A)\,p^2 &= f_1(r^2, T_0, K_0), \\ (B - A)\,q^2 &= f_2(r^2, T_0, K_0), \end{aligned} \tag{67}$$

где выражения для функций f_1 и f_2 получатся сразу, если в формулах (66) вычислить определители в числителе и знаменателе. Перемножая левые и правые части равенств (67) и извлекая затем квадратный корень, получаем

$$(B - A)\,pq = \sqrt{f_1 f_2} = \sqrt{f(r^2, T_0, K_0)}. \tag{68}$$

Обратимся теперь к последнему уравнению системы (60). Как уже указывалось выше, в правой части этого уравнения в рассматриваемом случае стоит нуль, а второй член левой части определен выражением (68). Подставив его в это уравнение, получим

$$C\dot{r} = -\sqrt{f(r^2, T_0, K_0)}.$$

Таким образом, мы получили дифференциальное уравнение относительно одной неизвестной величины r (проекции угловой скорости на ось ζ). В этом уравнении переменные разделяются, поэтому можно написать

$$\frac{C\,dr}{\sqrt{f(r^2, T_0, K_0)}} = -dt.$$

Интегрируя это равенство, получаем

$$C\int \frac{dr}{\sqrt{f(r^2, T_0, K_0)}} = -t + S, \tag{69}$$

где S — постоянная интегрирования.

После подстановки в явной форме выражения для $f(r^2, T_0, K_0)$ в левой части формулы (69) получается эллиптический интеграл, и таким образом, задача сводится к одной простой квадратуре — эллиптическому интегралу. Интегралы такого рода хорошо изучены, и для них составлены специальные таблицы. Вычислив этот интеграл, т. е. найдя t как функцию от r и трех произвольных постоянных S, K_0 и T_0, определяемых начальными данными, а затем разрешив полученное соотношение относительно r, нужно вернуться к уравнениям (66) и подставить в их правые части найденное выражение r. Тогда p и q тоже будут найдены как функции t и указанных трех произвольных постоянных. Уравнения (60) полностью проинтегрированы, причем были использованы два готовых первых интеграла, даваемых законами сохранения, и лишь один раз пришлось вычислить интеграл.

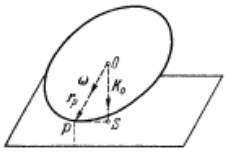


Рис. V.10.

Указанный прием позволяет найти введенные выше вспомогательные переменные — проекции p, q и r как функции времени и начальных данных, но для того чтобы представить себе картину движения твердого тела по инерции, надо было бы проинтегрировать теперь систему уравнений (53). Значительно удобнее «увидеть», каким образом фактически происходит движение твердого тела по инерции, воспользовавшись изящным геометрическим приемом, указанным Пуансо.

Рассмотрим эллипсоид инерции, построенный для неподвижной точки O (рис. V.10). Назовем *мгновенным полюсом* P точку, в которой мгновенная ось пересекает этот эллипсоид инерции, обозначим через $\boldsymbol{r}_P$ радиус-вектор точки P и положим

$$\lambda = \frac{|\boldsymbol{r}_P|}{|\boldsymbol{\omega}|}. \tag{70}$$

Координаты точки P, равные

$$\xi = \lambda p, \quad \eta = \lambda q, \quad \zeta = \lambda r, \tag{71}$$

должны удовлетворять уравнению эллипсоида инерции, т. е. уравнению

$$A\xi^2 + B\eta^2 + C\zeta^2 - 1 = 0, \tag{72}$$

так как по условию ξ, η, ζ — главные оси инерции для точки O. Подставляя в формулу (72) выражения (71), получаем

$$\lambda^2 (Ap^2 + Bq^2 + Cr^2) - 1 = 0, \tag{73}$$

или

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2T}} = \text{const}. \tag{74}$$

Покажем теперь, что проекция OS радиуса-вектора $\boldsymbol{r}_P$ на направление постоянного вектора кинетического момента $\boldsymbol{K}_0$ также не меняется во времени:

$$OS = \text{Пр}_{\boldsymbol{K}_0} \boldsymbol{r}_P = \text{Пр}_{\boldsymbol{K}_0} \lambda \boldsymbol{\omega} = \lambda \text{Пр}_{\boldsymbol{K}_0} \boldsymbol{\omega} = \lambda \frac{\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{K}_0}{K_0} = \lambda \frac{2T}{K_0} = \text{const}. \tag{75}$$

Теперь покажем, что нормаль N к эллипсоиду инерции в точке P параллельна вектору $\boldsymbol{K}_0$. Для этого вычислим проекции вектора-градиента

$$\frac{\partial F}{\partial \xi} = 2A\xi, \quad \frac{\partial F}{\partial \eta} = 2B\eta, \quad \frac{\partial F}{\partial \zeta} = 2C\zeta,$$

где F — левая часть уравнения (72). Проекции этого вектора-градиента пропорциональны проекциям вектора $\boldsymbol{K}_0$, так как проекции вектора $\boldsymbol{K}_0$ равны

$$Ap = \frac{1}{\lambda} A\xi, \quad Bq = \frac{1}{\lambda} B\eta, \quad Cr = \frac{1}{\lambda} C\zeta.$$

Из того, что нормаль к эллипсоиду инерции в точке P параллельна вектору $\boldsymbol{K}_0$, следует, что плоскость, касательная к эллипсоиду инерции в точке P, перпендикулярна вектору $\boldsymbol{K}_0$. Но выше было показано, что проекция вектора $\boldsymbol{r}_P$ на направление $\boldsymbol{K}_0$ не меняется. Это значит, что касательная к эллипсоиду инерции плоскость все время пересекает постоянный вектор $\boldsymbol{K}_0$ в одной и той же точке.

Таким образом, начальные условия задают направление вектора $\boldsymbol{K}_0$ и плоскость, которая пересекает вектор $\boldsymbol{K}_0$ и касается эллипсоида инерции. При движении тела эллипсоид инерции также движется вместе с телом, однако он всегда касается указанной плоскости, положение которой в пространстве не меняется. В силу того, что точка P расположена на направлении вектора $\boldsymbol{\omega}$, т. е. на направлении мгновенной оси, скорость этой точки тела в любое мгновение равна нулю. Отсюда следует, что движение по инерции тела с неподвижной точкой всегда происходит так, что эллипсоид инерции, построенный для неподвижной точки, вертится и катится без скольжения по неподвижной плоскости, положение которой в пространстве полностью определяется начальными данными.

Рассмотрим теперь случай, когда вектор $\boldsymbol{\omega}$ направлен по одной из главных осей, т. е. когда

$$p = \omega, \quad q = r = 0,$$

или

$$q = \omega, \quad r = p = 0,$$

или же

$$r = \omega, \quad p = q = 0.$$

Каждое из этих движений удовлетворяет динамическим уравнениям Эйлера, и непосредственно видно, что если в случае Эйлера (т. е. при $M_\xi = M_\eta = M_\zeta = 0$) вектор $\boldsymbol{\omega}$ в начальный момент направлен по главной оси инерции, то движение тела по инерции является вращением вокруг этой оси. Такие движения называются *перманентными вращениями тела*[1])

2. Случай $A = B$ (динамическая симметрия). Рассмотрим теперь частный случай, когда тело имеет ось динамической симметрии. Так как ось симметрии всегда является главной осью инерции, ясно, что одна из осей греческой системы должна быть направлена по оси симметрии. Направим по ней ось ζ. Учитывая, что $A = B$, т. е. что эллипсоид инерции является эллипсоидом вращения, из последнего уравнения системы (60) сразу получаем, что

$$\frac{dr}{dt} = 0, \text{ т. е. } r = \text{const}, \tag{76}$$

а из использовавшегося выше соотношения

$$A^2p^2 + B^2q^2 = K_0^2 - C^2r^2$$

получаем

$$A^2(p^2 + q^2) = K_0^2 - C^2r^2$$

или, учитывая (76),

$$p^2 + q^2 = \text{const}. \tag{77}$$

Проведем теперь плоскость П через вектор $\boldsymbol{\omega}$ и ось ζ (рис. V.11). Эта плоскость пересекает плоскость $\xi O \eta$ по прямой R. Спроектируем вектор $\boldsymbol{\omega}$ на направление оси ζ и на прямую R. Эти проекции, равные r и $\sqrt{p^2+q^2}$, в силу формул (76) и (77) не меняются при движении. Отсюда следует, что вектор $\boldsymbol{\omega}$ не меняется по величине и что угол между вектором $\boldsymbol{\omega}$ и осью ζ также не меняется.

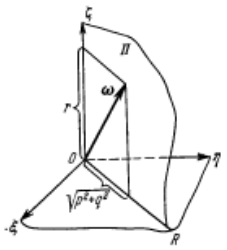


Рис. V.11.

Покажем теперь, что *при $A = B$ вектор кинетического момента $\boldsymbol{K}_0$ всегда* (а не только в случае Эйлера!) *лежит в плоскости* П. Действительно, проекции вектора $\boldsymbol{K}_0$ на оси ξ и η равны Ap и Bq соответственно, и так как в рассматриваемом случае $A = B$, эти проекции пропорциональны проекциям вектора $\boldsymbol{\omega}$. Отсюда сразу следует, что проекция вектора $\boldsymbol{K}_0$ на плоскость $\xi O \eta$ отличается лишь на множитель A от проекции вектора $\boldsymbol{\omega}$ на эту плоскость, т. е. что вектор $\boldsymbol{K}_0$ также лежит в плоскости П. Но, как уже было указано, в случае движения по инерции вектор $\boldsymbol{K}_0$ неподвижен в пространстве, вектор же $\boldsymbol{\omega}$ движется. Отсюда сразу следует, что во время движения по инерции симметричного твердого тела плоскость П вращается вокруг неподвижного направления — это направление задается вектором $\boldsymbol{K}_0$.

Однако в случае Эйлера проекция вектора $\boldsymbol{\omega}$ на направление вектора $\boldsymbol{K}_0$ также постоянна:

$$\text{Пр}_{\boldsymbol{K}_0} \boldsymbol{\omega} = \frac{\boldsymbol{K}_0 \cdot \boldsymbol{\omega}}{|\boldsymbol{K}_0|} = \frac{App + Bqq + Crr}{|\boldsymbol{K}_0|} = \frac{2T_0}{|\boldsymbol{K}_0|} = \text{const}, \tag{78}$$

а значит, угол между вектором $\boldsymbol{\omega}$ и вектором $\boldsymbol{K}_0$ не меняется. Выше уже было сказано, что не меняется и угол между вектором $\boldsymbol{\omega}$ и осью ζ.

Таким образом, во время движения по инерции симметричного твердого тела всегда существует плоскость П, в которой находятся векторы $\boldsymbol{\omega}$ и $\boldsymbol{K}_0$. Абсолютные величины этих векторов, а также углы, которые они составляют с осью симметрии и между собой, сохраняют постоянное значение. Значит, изменение вектора $\boldsymbol{\omega}$ происходит лишь за счет вращения плоскости П вокруг неподвижного вектора $\boldsymbol{K}_0$.

Рассмотрим теперь плоскость П. Направим ось z по фиксированному направлению вектора $\boldsymbol{K}_0$, а ось ζ вдоль оси симметрии тела. Угол между этими осями равен θ; выше было показано, что $\theta = \text{const}$ и, значит, $\dot\theta = 0$. Из равенства (52) следует, что в этом случае

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\boldsymbol{\varphi}} + \dot{\boldsymbol{\psi}}. \tag{79}$$

Векторы $\dot{\boldsymbol{\varphi}}$ и $\dot{\boldsymbol{\psi}}$ направлены по осям ζ и z соответственно (рис. V.8); положим $\dot\varphi = \omega_1$, $\dot\psi = \omega_2$ и в силу равенства (79) разложим в плоскости П вектор $\boldsymbol{\omega}$ на $\boldsymbol{\omega}_1$ и $\boldsymbol{\omega}_2$ (рис. V.12). Модули этих векторов постоянны, так как модуль вектора $\boldsymbol{\omega}$, а также углы между $\boldsymbol{\omega}$ и осями ζ и z сохраняют постоянное значение. Таким образом, движение симметричного твердого тела по инерции можно рассматривать как сумму двух вращений с постоянными угловыми скоростями. Одно вращение происходит вокруг оси симметрии ζ с угловой скоростью ω_1, а другое — вокруг постоянного направления кинетического момента $\boldsymbol{K}_0$ с угловой скоростью ω_2.

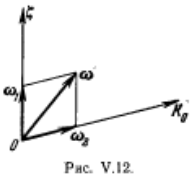


Рис. V.12.

Движение, при котором симметричное тело с неподвижной точкой вращается с постоянной угловой скоростью вокруг оси материальной симметрии, а сама эта ось симметрии вращается

[1]) Вопрос об устойчивости перманентных вращений будет рассмотрен в гл. VI.

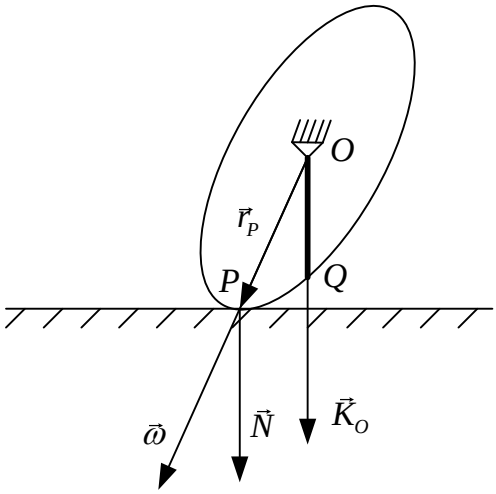
с постоянной угловой скоростью вокруг какого-либо проходящего через неподвижную точку фиксированного направления, образующего с этим направлением постоянный угол θ, называется *регулярной прецессией*. Неподвижная ось, вокруг которой вращается ось симметрии, называется *осью прецессии* [1]).

Итак, движение по инерции симметричного ($A=B$) твердого тела всегда является регулярной прецессией, ось которой совпадает с направлением кинетического момента. Угловая скорость ω_3 называется *угловой скоростью собственного вращения*, а угловая скорость ω_2 — *угловой скоростью прецессии*. Угловые скорости ω_3 и ω_2, угол θ и направление вектора $\boldsymbol{K}_0$ полностью определяются начальными данными. Если эти данные таковы, что вектор ω в начальный момент направлен по главной оси инерции, то по этой же оси будет направлен и вектор $\boldsymbol{K}_0$ (см. примечание на стр. 187—188). В этом случае будет происходить регулярная прецессия при $\theta=0$, т. е. вращение вокруг стационарной оси.

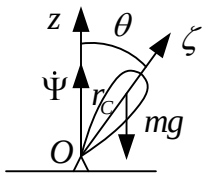
16. В случае Эйлера, когда тело обладает динамической симметрией $(A=B)$, тело будет совершать регулярную прецессию(такое движение, при котором тело вращается относительно оси динамической симметрии (собственное вращение), которая в свою очередь вращается вокруг неподвижной оси (прецессионное вращение). Угол между осью собственного вращения и осью прецессии (угол нутации) сохраняется постоянным, также как и угловые скорости прецессии и собственного вращения.

$$\boxed{\dot{\Psi}=\frac{K_O}{A},\dot{\varphi}=\frac{A-C}{A}r, tg\theta=\frac{A\sqrt{p^2+q^2}}{Cr}}$$ Динамическая симметрия тела – необходимое и достаточное условие для регулярной прецессии в случае Эйлера.

17. В случае Эйлера, когда динамической симметрии нет, возможна геометрическая интерпретация движения – интерпретация Пуансо. Будем для определенности считать, что $A<B<C$. Представим тело эллипсоидом инерции в неподвижной точке O (см. рис.)



Уравнение эллипсоида в главных осях: $f(\alpha,\beta,\gamma)=A\alpha^2+B\beta^2+C\gamma^2-1=0$ Геометрическая интерпретация Пуансо звучит и изображается так (см. рис.). В начале движения образуется плоскость, касательная к эллипсоиду инерции в точке пересечения эллипсоида начальной угловой скоростью. В дальнейшем плоскость занимает неизменное положение, а эллипсоид инерции с неподвижным центром O катается по ней без проскальзывания. О других деталях качения сказать понятно не можем.



18. Речь о вынужденной регулярной прецессии заводится в случае Лагранжа. Центр масс, оставаясь на сфере радиуса $\vec{r}_C$, будет двигаться между двумя параллелями, соответствующими $\theta_{\min}$ и $\theta_{\max}$ - нутационное движение твердого тела. Данное движение имеет колебательный характер. Траектория центра масс имеет вид сферической циклоиды. Время движения от одной параллели к другой остается постоянным $\left(t_{12}=t_{21}\right)$. Когда $\theta_{\min}=\theta_{\max}$, будет вынужденная регулярная прецессия.

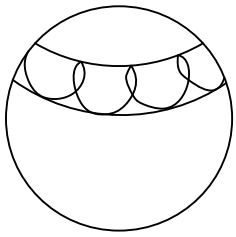
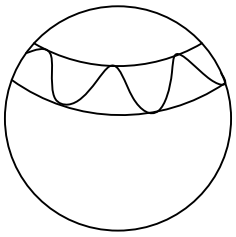
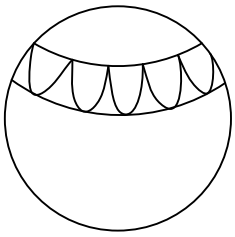
$$\begin{cases} A=B \\ \dot{\Psi}=const \\ \dot{\varphi}=const \\ \theta=const \end{cases} \Rightarrow \boxed{\vec{M}_O = C\left[\dot{\vec{\Psi}},\dot{\vec{\varphi}}\right]\left(1+\frac{C-A}{C}\frac{\dot{\Psi}}{\dot{\varphi}}\cos\theta\right)}$$ - точная формула гироскопии, определяющая момент сил, вызывающий вынужденную регулярную прецессию

19. Формула для момента сил, который поддерживает регулярную прецессию с заданными параметрами для тела, обладающего динамической симметрией $A=B\neq C$:

$$\vec{M}_O = C\left[\dot{\vec{\Psi}},\dot{\vec{\varphi}}\right]\left(1+\frac{C-A}{C}\frac{\dot{\Psi}}{\dot{\varphi}}\cos\theta\right)$$

20. Случай Лагранжа - это движение динамически симметричного твердого тела с одной неподвижной точкой в поле тяжести, причем центр масс не совпадает с неподвижной точкой. Подробнее ↓↓↓

21. Центр масс, оставаясь на сфере радиуса $\vec{r}_C$, будет двигаться между двумя параллелями, соответствующими $\theta_{\min}$ и $\theta_{\max}$ - нутационное движение твердого тела. Данное движение имеет колебательный характер. Траектория центра масс имеет вид сферической циклоиды. Время движения от одной параллели к другой остается постоянным $\left(t_{12}=t_{21}\right)$. Если мы нашли $\dot{\theta}^2=f\left(\theta\right)$, то $\theta_{\min}$ и $\theta_{\max}$ находим из условия $\dot{\theta}=0$, т.е. из уравнения $f\left(\theta\right)=0$. Центр масс на поверхности сферы радиуса $\vec{r}_C$.

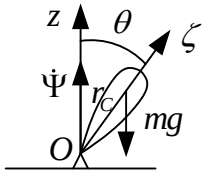




$$\begin{cases} A=B \\ \dot{\Psi}=const \\ \dot{\varphi}=const \\ \theta=const \end{cases} \Rightarrow \boxed{\vec{M}_O = C\left[\dot{\vec{\Psi}},\dot{\vec{\varphi}}\right]\left(1+\frac{C-A}{C}\frac{\dot{\Psi}}{\dot{\varphi}}\cos\theta\right)}$$. При дополнительном условии: $\dot{\theta}_0=0$ это равенство также и достаточное условие регулярной прецессии. При $\dot{\theta}_0\neq 0$ регулярной прецессии быть не может

22. Качественное исследование движения в случае Лагранжа может быть проведено с помощью интегралов[2] движения. . Т.к. движение реализуется в поле тяжести, то имеет место интеграл энергии: $T+\Pi=const$, или $\boxed{\frac{1}{2}A\left(p^2+q^2\right)+\frac{1}{2}Cr^2+Pl\cos\theta=h_0}$, где l - расстояние от центра тяжести до неподвижной точки. Поскольку $M_z=0$, то $\boxed{K_z=\vec{K}_O\frac{\dot{\vec{\Psi}}}{\dot{\Psi}}=const}$ Третий интеграл получается из третьего ДУЭ: $C\dot{r}+\underbrace{\left(B-A\right)}_{=0}qp=\underbrace{M_\zeta}_{=0}\Rightarrow C\dot{r}=0\Rightarrow\boxed{r=const}$

23. Интеграл полной энергии: $T+\Pi=const$, или $\boxed{\frac{1}{2}A\left(p^2+q^2\right)+\frac{1}{2}Cr^2+Pl\cos\theta=h_0}$, где l - расстояние от центра тяжести до неподвижной точки. Поскольку $M_z=0$, то $\boxed{K_z=\vec{K}_O\frac{\dot{\vec{\Psi}}}{\dot{\Psi}}=const}$. Интеграл проекции угловой скорости на ось динамической симметрии получается из третьего ДУЭ: $C\dot{r}+\underbrace{\left(B-A\right)}_{=0}qp=\underbrace{M_\zeta}_{=0}\Rightarrow C\dot{r}=0\Rightarrow\boxed{r=const}$

24. Прецессия — явление, при котором момент импульса тела меняет своё направление в пространстве под действием момента внешней силы. Мы рассматриваем ее как явление, при котором под действием силы ось симметрии начинает перемещаться перпендикулярно направлению действия силы. Вынужденная прецессия происходит под действием внешних сил, свободная, соответственно, наоборот.(W) Выясним, что называют быстрой и медленной



прецессией. Для этого рассмотрим регулярную прецессию.

$$lP\sin\theta=C\dot{\Psi}\dot{\varphi}\sin\theta\left(1+\frac{C-A}{C}\frac{\dot{\Psi}}{\dot{\varphi}}\cos\theta\right)\dot{\Psi}=\frac{-C\dot{\varphi}\pm\sqrt{C^2\dot{\varphi}^2+4mgl\left(C-A\right)\cos\theta}}{2\left(C-A\right)\cos\theta}$$, но

$$\dot{\Psi}=\frac{-C\dot{\varphi}\pm C\dot{\varphi}\left(1+\frac{2mgl\left(C-A\right)\cos\theta}{C\dot{\varphi}}\right)}{2\left(C-A\right)\cos\theta}=$$

$\sqrt{1+x}=1+\frac{x}{2}+\ldots$, если x<<1.

$$=\left[\begin{array}{l}\frac{mgl}{C\dot{\varphi}},\\ -\frac{C\dot{\varphi}}{\left(C-A\right)\cos\theta}.\end{array}\right.$$

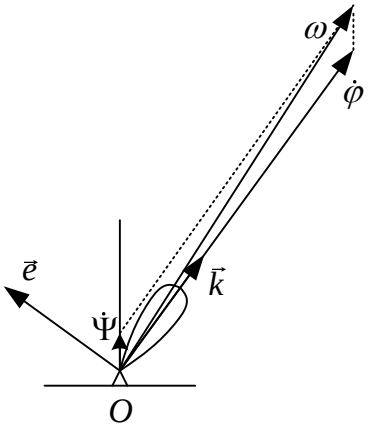
Первый случай соответствует медленной прецессии и не зависит от угла нутации. Второй случай – быстрая прецессия, имеет зависимость от θ и другое направление вращения

25. Если $\dot{\varphi}\gg\dot{\Psi}$ (много больше), то можно применить элементарную теорию гироскопа. И точная формула гироскопии имеет приближенную форму, простую: $\boxed{\vec{M}_O=C\left[\dot{\vec{\Psi}},\dot{\vec{\varphi}}\right]}$

[2] Первый интеграл движения – функция от обобщенных координат и времени, которая при подстановке в нее любого решения системы уравнений движения, сохраняет как функция времени свое значение.

$$\begin{cases} \vec{K}_O = A\sqrt{p^2+q^2}\vec{e} + Cr\vec{k} \\ \vec{\omega} = \sqrt{p^2+q^2}\vec{e} + r\vec{k} \\ \dot{\vec{\varphi}} = \dot{\varphi}\vec{k} \end{cases}$$

В силу $\dot{\varphi} \square \dot{\Psi}$, можно считать, что эти векторы сонаправлены по оси симметрии.



26. По поведению $\vec{K}_O$ можем судить о поведении оси симметрии. $\frac{d\vec{K}_O}{dt} = \vec{M}_O$ или $\boxed{\vec{\upsilon}_K = \vec{M}_O}$.

Последнюю формулу называют формулой Резаля для элементарного гироскопа. Ее можно интерпретировать следующим образом: пусть K - точка оси, совпадающая с концом вектора $\vec{K}_O$, тогда ее скорость равна $\vec{M}_O$. Таким образом, скорость конца вектора кинетического момента, а значит, и скорость точки K оси гироскопа, равна по величине и направлению главному моменту внешних сил относительно неподвижной точки. Можно отметить следующие гироскопические эффекты: 1. Если на ось гироскопа начнет действовать сила, то ось отклонится не в направлении действия силы, а в направлении момента $\vec{M}_O$ этой силы относительно неподвижной точки. 2. Безынерционность движения оси гироскопа: с прекращением действия силы, $\vec{M}_O$ этой силы мгновенно обращается в нуль. Следовательно, $\vec{\upsilon}_K = \vec{0}$, т.е. с прекращением действия силы движение оси гироскопа прекращается мгновенно.

27.

§ 2. Вывод уравнений Лагранжа

Прежде чем приступить к выводу ковариантной записи уравнений движения — уравнений Лагранжа, получим два вспомогательных равенства.

Дифференцируя равенство (9) по t, получаем

$$\boldsymbol{v}_i = \frac{d\boldsymbol{r}_i}{dt} = \sum \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j}\dot{q}_j + \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial t}. \qquad (13)$$

Рассматривая $\dot{q}_j$ как независимые переменные и дифференцируя по ним равенство (13), получаем первое вспомогательное соотношение

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j} \qquad (j = 1, 2, \ldots, n). \qquad (14)$$

Обратимся снова к формуле (13) и выпишем частную производную от левой и правой части этого равенства по q_k

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}_i}{\partial q_k} = \sum \frac{\partial^2 \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j\, \partial q_k}\dot{q}_j + \frac{\partial^2 \boldsymbol{r}_i}{\partial t\, \partial q_k}. \qquad (15)$$

В силу формулы (9) частная производная от радиуса-вектора по q_k также является функцией всех «новых» координат $q_1, \ldots, q_k$ и t.

Рассмотрим теперь полную производную по времени от этой частной производной $\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_k}$:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_k} = \sum \frac{\partial^2 \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j\, \partial q_k}\dot{q}_j + \frac{\partial^2 \boldsymbol{r}_i}{\partial t\, \partial q_k}. \qquad (16)$$

Правые части формул (15) и (16) совпадают; следовательно, должны совпадать и левые их части:

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}_i}{\partial q_k} = \frac{d}{dt}\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_k} \qquad (k = 1, \ldots, n). \qquad (17)$$

Формула (17) и является вторым искомым вспомогательным соотношением.

Приступим теперь к выводу уравнений Лагранжа. Если «старая» система отсчета с декартовыми координатами x, y, z инерциальна, то в ней верен второй закон Ньютона в его обычной записи

$$m_i \frac{d\boldsymbol{v}_i}{dt} = \boldsymbol{F}_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, N). \qquad (18)$$

Выразим, используя соотношение (13), все $\boldsymbol{v}_i$ через новые координаты, их производные и время, подставим полученные функции $\boldsymbol{v}_i(q, \dot{q}, t)$ в равенства (18), скалярно умножим каждое i-е из этих равенств на частную производную $\partial \boldsymbol{r}_i/\partial q_j$ и сложим результаты:

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \frac{d\boldsymbol{v}_i(q, \dot{q}, t)}{dt}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j} = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{F}_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j}. \qquad (19)$$

Полагая $j = 1, 2, \ldots, n$, можно выписать n таких равенств.

Обозначим через Q_j скалярные функции в правых частях равенств (19):

$$Q_j = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{F}_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j} \qquad (j = 1, 2, \ldots, n). \qquad (20)$$

Механический смысл функций Q_j будет выяснен далее.

Левые части равенств (19) запишем так:

$$\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{N} m_i \boldsymbol{v}_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j} - \sum_{i=1}^{N} m_i \boldsymbol{v}_i \cdot \frac{d}{dt}\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j}. \qquad (21)$$

Воспользовавшись этой записью и полученными выше вспомогательными соотношениями (14) и (17), перепишем равенства (19) в следующем виде:

$$\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{N} m_i \boldsymbol{v}_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{v}_i}{\partial \dot{q}_j} - \sum_{i=1}^{N} m_i \boldsymbol{v}_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{v}_i}{\partial q_j} = Q_j \qquad (j = 1, 2, \ldots, n),$$

или

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}\sum_{i=1}^{N} \frac{m_i \boldsymbol{v}_i \cdot \boldsymbol{v}_i}{2} - \frac{\partial}{\partial q_j}\sum_{i=1}^{N} \frac{m_i \boldsymbol{v}_i \cdot \boldsymbol{v}_i}{2} = Q_j \qquad (j = 1, 2, \ldots, n).$$

В этих равенствах сумма

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{m_i \boldsymbol{v}_i \cdot \boldsymbol{v}_i}{2} = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i v_i^2}{2}$$

совпадает с выражением для кинетической энергии T системы, записанной в «новых» координатах. Поэтому окончательно получаем

$$\boxed{\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j \qquad (j = 1, 2, \ldots, n).} \qquad (22)$$

28. Уравнения Лагранжа содержат n+1 функций – это Q_i, где i=1..n и кинетическая энергия T. Чтобы воспользоваться уравнениями Лагранжа, нужно выразить эти функции через координаты, производные от них и время, Таким образом, уравнения выписываются абсолютно одинаково для любой системы координат, и различие в выборе координат сказывается лишь на виде n+1 функций, входящих в эти уравнения. Поэтому можно говорить, что уравнения Лагранжа ковариантны относитльно любого точечного преобразования координат. (A133)

29. $\boxed{\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \dfrac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i = \sum\limits_j \left(\vec{F}_j, \dfrac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_i}\right) \\ i = \overline{1,n} \end{cases}}$, где $T(t, q, \dot{q})$ - кинетическая энергия.

30. Вообще говоря, обобщенные координаты - это любые три независимые величины, однозначно задающие положение точки в пространстве. Обозначаются: $q_1(t), q_2(t), q_3(t)$.В уравнениях Лагранжа вводятся переменные Лагранжа – совокупность переменных: время t, обобщенные координаты q_i, обобщенные скорости $\dot{q}_i$. Найдя эти самые координаты мы можем говорить о том, что нам известно, какое место в пространстве занимает точка.

Стационарно задане системы – системы, для которых $(\partial \vec{r}(t, q, \dot{q})/\partial t = 0)$

31. Чтобы найти кинетическую энергию в обобщенных координат, надо массу домножить на квадрат скорости, который можно получить из известного нам выражения $\boxed{\vec{\upsilon}(t)=\sum_{i=1}^{3}H_i\dot{q}_i\vec{e}_i}$ Е

$$T=\frac{1}{2}(Ap^2+Bq^2+Cr^2).$$

сли у тела есть неподвижная точка ,то , иначе можно представить кинетическую энергию по теореме Кенига и прибавить к этому выражению кинетическую

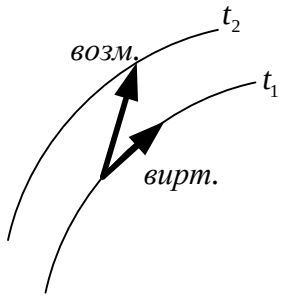
$$T=\sum_{i=1}^{N}\frac{m_i}{2}\left(\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t}+\sum_f\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_f}\dot{q}_f\right)^2.$$

энергию центра масс. Можно записать, что

32. В правой части уравнений Лагранжа находятся так называемые обобщенные силы. Их можно записать так: $\boxed{Q_i=\sum_j\left(\vec{F}_j,\frac{\partial\vec{r}_j}{\partial q_i}\right)=\sum_j\left(\vec{F}_j,\frac{d\vec{r}_j(dq_i)}{dq_i}\right)=\frac{\delta A^{вирт}(dq_i)}{dq_i}}$, где $\delta A^{вирт}(dq_i)$ - работа на виртуальном перемещении. Во многих задачах силы являются потенциальными: $\vec{F}_j=-\frac{\partial\Pi(\vec{r}_1,...,\vec{r}_N,t)}{\partial\vec{r}_j}$ (градиент по $\vec{r}_j$). Тогда

$Q_i=\sum_j\left(\vec{F}_j,\frac{\partial\vec{r}_j}{\partial q_i}\right)=-\sum_j\left(\frac{\partial\Pi}{\partial\vec{r}_j},\frac{\partial\vec{r}_j}{\partial q_i}\right)=-\frac{\partial\Pi(q_1,...,q_N,t)}{\partial q_i}$. Перенеся $\frac{\partial\Pi(q_1,...,q_N,t)}{\partial q_i}$ из правой части лагранжевой системы в левую, можно ввести функцию Лагранжа $\boxed{L=T-\Pi}$ и записать уравнения Лагранжа через нее: $\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_i}=Q_i^*}$. Если все силы потенциальные, то удобно записать $\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_i}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_i}=-\frac{\partial\Pi}{\partial q_i}}$

33. $\delta A^{вирт}(dq_i)$ - работа на виртуальном перемещении. Чтобы найти виртуальную работу, нужно задать приращение dq_i и посмотреть приращение системы при $t=const$, при замороженном времени или, как говорят, при замороженной связи. Виртуальное перемещение - это мысленное перемещение, которое допускают замороженные связи.



Возможные перемещения: $d\vec{r}_j=\frac{\partial\vec{r}_j}{\partial t}dt+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\vec{r}_j}{\partial q_i}dq_i$ Виртуальные перемещения: $\delta\vec{r}_j=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\vec{r}_j}{\partial q_i}dq_i$

34. Механическая связь – это ограничения, накладываемые на движение механической системы вследствие распределения в пространстве материи (тел и поверхностей). Математическая запись механической связи для N точек выглядит так:

$f_k\left(\vec{r}_1,...,\vec{r}_N,\dot{\vec{r}}_1,...,\dot{\vec{r}}_N,t\right)=0$ (*). Связи называются удерживающими (двусторонними), если условия (*) имеют вид равенств ($=0$) в отличие от неудерживающих (односторонних, освобождающих) (≥ 0).Если уравнение связи (*) не содержит времени t, связь называется стационарной (склерономной), в противном случае нестационарной (реономной). Связи называются конечными (голономными, геометрическими), если в уравнения (*) не входят производные $\dot{\vec{r}}_k$, и дифференциальными (кинематическими), если входят. Существует промежуточный тип связей – дифференциальные интегрируемые (полуголономные), - уравнения которых есть результат взятия полной производной по времени t от конечной связи. Типичный пример – качение без проскальзывания: $\dot{x}-\dot{\varphi}R=0 \Rightarrow x-\varphi R+C=0$.

Возможные перемещения: $d\vec{r}_j=\frac{\partial \vec{r}_j}{\partial t}dt+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_i}dq_i$ Виртуальные перемещения:

$\delta\vec{r}_j=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_i}dq_i$. Числом степеней свободы голономной системы называют число независимых координат, определяющих каждую точку системы однозначно. Уравнения Лагранжа применяются, например, для полного описания поведения голономных систем с идеальными связями.

35. Идеальные связи – механические связи, виртуальная работа реакций которых равна нулю. Эквивалентное условие – обобщенная сила, соответствующая реакции связи, равна нулю: $Q_i=0$. Эквивалентность является следствием независимости обобщенных координат:

$$\delta A=\sum_{j=1}^{k}\left(\vec{R}_j,\delta\vec{r}_j\right)=\sum_{i=1}^{n}\tilde{Q}_i\delta q_i=0$$

36. Уравнения Лагранжа – дифференциальные уравнения движения, разрешимые относительно старших производных, в которых число неизвестных совпадает с числом уравнений.

37. В стационарном случае кинетическая энергия является однородной квадратичной формой относительно скоростей с коэффициентами, зависящими только от обобщенных координат. (см. А142)

38.

Теорема 1. *Определитель, составленный из коэффициентов $a_{jk}(q, t)$, отличен от нуля при любых q и t:*

$$\det \| a_{jk} \|_{j,\,k=1}^{n} \neq 0. \tag{41}$$

Доказательство. Напомним, что по определению «новые» координаты $q_1, \ldots, q_n$ независимы. Все $3N$ функций

$$x_i = f_i(q, t), \quad y_i = \varphi_i(q, t), \quad z_i = \psi_i(q, t) \qquad (i = 1, \ldots, N)$$

определены в любой момент t, коль скоро заданы q. При $n = 3N$ все эти функции независимы. Если же $n < 3N$, то по предположению (см. стр. 125) среди этих функций содержится n независимых функций. Условие того, что среди этих $3N$ функций содержится n независимых, состоит в том, что ранг матрицы Якоби

$$\begin{Vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial q_1} & \cdots & \frac{\partial x_1}{\partial q_n} \\ \frac{\partial y_1}{\partial q_1} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial q_n} \\ \frac{\partial z_1}{\partial q_1} & \cdots & \frac{\partial z_1}{\partial q_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial x_N}{\partial q_1} & \cdots & \frac{\partial x_N}{\partial q_n} \\ \frac{\partial y_N}{\partial q_1} & \cdots & \frac{\partial y_N}{\partial q_n} \\ \frac{\partial z_N}{\partial q_1} & \cdots & \frac{\partial z_N}{\partial q_n} \end{Vmatrix} \tag{42}$$

равен n. Следовательно, равен n и ранг матрицы

$$\begin{Vmatrix} \sqrt{m_1}\,\frac{\partial x_1}{\partial q_1} & \cdots & \sqrt{m_1}\,\frac{\partial x_1}{\partial q_n} \\ \sqrt{m_1}\,\frac{\partial y_1}{\partial q_1} & \cdots & \sqrt{m_1}\,\frac{\partial y_1}{\partial q_n} \\ \sqrt{m_1}\,\frac{\partial z_1}{\partial q_1} & \cdots & \sqrt{m_1}\,\frac{\partial z_1}{\partial q_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \sqrt{m_N}\,\frac{\partial x_N}{\partial q_1} & \cdots & \sqrt{m_N}\,\frac{\partial x_N}{\partial q_n} \\ \sqrt{m_N}\,\frac{\partial y_N}{\partial q_1} & \cdots & \sqrt{m_N}\,\frac{\partial y_N}{\partial q_n} \\ \sqrt{m_N}\,\frac{\partial z_N}{\partial q_1} & \cdots & \sqrt{m_N}\,\frac{\partial z_N}{\partial q_n} \end{Vmatrix}, \tag{43}$$

которая отличается от матрицы (42) тем, что все элементы первых трех строк умножены на $\sqrt{m_1}$, следующих трех строк на $\sqrt{m_2}$ и т. д. Введем вектор-столбец $\boldsymbol{u}_i$, компоненты которого совпадают с элементами i-го столбца матрицы (43). Из того факта, что ранг матрицы (43) равен n, сразу следует, что векторы $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n$ линейно независимы.

Условие линейной независимости n векторов $\boldsymbol{u}_i$ состоит в том, что составленный из них определитель Грама [1]) отличен от нуля, т. е.

$$\det \begin{Vmatrix} \boldsymbol{u}_1 \cdot \boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{u}_1 \cdot \boldsymbol{u}_2 & \ldots & \boldsymbol{u}_1 \cdot \boldsymbol{u}_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \boldsymbol{u}_n \cdot \boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{u}_n \cdot \boldsymbol{u}_2 & \ldots & \boldsymbol{u}_n \cdot \boldsymbol{u}_n \end{Vmatrix} \neq 0.$$

Но

$$\boldsymbol{u}_j \cdot \boldsymbol{u}_k = \sum_{i=1}^{N} m_i \left(\frac{\partial x_i}{\partial q_j} \frac{\partial x_i}{\partial q_k} + \frac{\partial y_i}{\partial q_j} \frac{\partial y_i}{\partial q_k} + \frac{\partial z_i}{\partial q_j} \frac{\partial z_i}{\partial q_k} \right) = \sum_{i=1}^{N} m_i \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_k},$$

т. е. в соответствии с равенством (40)

$$\boldsymbol{u}_j \cdot \boldsymbol{u}_k = a_{jk}.$$

Поэтому

$$\det \| a_{jk} \|_{j,\,k=1}^{n} \neq 0.$$

Теорема доказана.

39.

$$\frac{dE}{dt}=\frac{d(T+V)}{dt}=N^{**}-\frac{\partial T}{\partial t}+\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{d(T_1+2T_0)}{dt}.$$

В частном случае, когда преобразование (9) стационарно,

$$\frac{\partial T}{\partial t}=T_1=T_0=0$$

и

$$\frac{dE}{dt}=N^{**}+\frac{\partial V}{\partial t}.$$

Если предположить далее, что потенциальное поле стационарно, то $\partial V/\partial t=0$ и

$$\boxed{\frac{dE}{dt}=N^{**}.} \tag{49}$$

Система, у которой все силы потенциальны, а потенциальное поле стационарно, была названа выше консервативной. На точки консервативной системы непотенциальные силы не действуют, $N^{**}=0$ и поэтому

$$\frac{dE}{dt}=0, \text{ т. е. } E=\text{const}.$$

Таким образом, мы установили, что закон сохранения механической энергии для консервативных систем имеет место в любых координатах $q_1, \ldots, q_n$, если преобразование (9) стационарно.

Покажем теперь, что $E=\text{const}$ во время движения и для некоторых неконсервативных систем. Действительно, равенство

$$N^{**}=\sum_j Q_j^{**}\dot{q}_j=0 \tag{50}$$

может иметь место, несмотря на то, что все (или некоторые) Q_j^{**} отличны от нуля. В таких случаях вновь $E=\text{const}$, хотя и существуют непотенциальные силы. Системы такого рода называют *гироскопическими*, а непотенциальные обобщенные силы Q_j^{**}, для которых выполняется условие (50), — *гироскопическими силами* [1]).

Если непотенциальные части обобщенных сил таковы, что во время движения выполняется неравенство

$$N^{**}=\sum_j Q_j^{**}\dot{q}_j\leqslant 0, \tag{51}$$

то в процессе движения $dE/dt\leqslant 0$ и полная энергия E не увеличивается, а может лишь рассеиваться на отдельных этапах движения. Если неравенство (51) выполняется строго (конечно, тогда хотя бы одна из производных $\dot{q}_j$ отлична от нуля), то движение все время сопровождается рассеиванием энергии. Системы такого рода называются *диссипативными* (соответственно — *строго диссипативными*), а силы, удовлетворяющие неравенству (51), — *диссипативными силами*.

40. За обобщенные координаты берутся координаты в неинерциальной СО. Следует добавить силы инерции, как переносные, так и кориолисовы - $\delta A_{кор}\neq 0$, т.к. виртуальные перемещения не совпадают с действительными. Можно взять за q обобщенные координаты в инерциальной СО, при этом не будет сил инерции и кинетическую энергию следует считать в абсолютной СО