

Измерение магнитного поля Земли

_____ группа
" " _____ 20__ г.

I. Аннотация

$$\vec{M} = \vec{P}_m \times \vec{B} \quad (6)$$

В работе измеряются вертикальная и горизонтальная составляющие магнитного поля Земли в районе Долгопрудного с помощью неодимовых шаров. В первой части работы определяются визические параметры шаров. Главный из них - их дипольный момент. Для его определения используются следующие методы: 1) измерение расстояния между расположенными друг над другом шарами, при котором сила магнитного поля равна силе тяжести шара, 2) определение максимальной массы цепочки шаров, при которой цепочка еще не отрывается от верхнего шара, и 3) измерение магнитного поля у полюса шара магнетометром. Для измерения горизонтальной составляющей магнитного поля Земли изучаются малые колебания подвешенной цепочки. Для нахождения вертикальной составляющей измеряется крутящий момент силы магнитного поля, действующий на горизонтально висящую цепочку.

II. Теоретические сведения

A. Физика магнитный диполей

Простейший магнитный диполь может быть образован витком с током. По определению, магнитный момент плоского витка площадью S с током I равен

$$\vec{P}_m = \frac{I}{c} S \vec{n} \quad (1)$$

Если расстояние до диполя много больше его размеров, то такой диполь называется точечным. Формула для поля точечного диполя записывается следующим образом:

$$\vec{B} = \frac{3(\vec{P}_m, \vec{r})\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{P}_m}{r^3} \quad (2)$$

Магнитный диполь в магнитном поле обладает энергией

$$W = -(\vec{P}_m, \vec{B}) \quad (3)$$

Из этой формулы следует, что сила, действующая на магнитный диполь, равна

$$\begin{aligned} \vec{F} &= -\vec{\nabla}W = \vec{\nabla}(\vec{P}_m, \vec{B}) = \\ &= \vec{i}(\vec{P}_m, \frac{\partial \vec{B}}{\partial x}) + \vec{j}(\vec{P}_m, \frac{\partial \vec{B}}{\partial y}) + \vec{k}(\vec{P}_m, \frac{\partial \vec{B}}{\partial z}) = \\ &= (\vec{P}_m, \vec{\nabla})\vec{B} \end{aligned} \quad (4)$$

Момент, действующий на магнитный диполь, следует из формулы

$$\begin{aligned} (\vec{M}, \vec{d}\vec{\alpha}) &= dW = -d(\vec{P}_m, \vec{B}) = \\ &= -(\vec{P}_m \times \vec{d}\vec{\alpha}, \vec{B}) = (\vec{P}_m \times \vec{B}, \vec{d}\vec{\alpha}) \end{aligned} \quad (5)$$

Зная магнитные моменты двух точечных диполей, по формулам 2, 4 и 6 можно рассчитать силу их взаимодействия и взаимный крутящий момент.

B. Сила притяжения двух диполей

Для двух одинаковых диполей, расположенных на расстоянии d друг от друга и направленных в одну сторону вдоль соединяющей их прямой посчитаем силу их взаимодействия. Поле одного из них на соединяющей диполи прямой

$$B(\vec{r}) = \frac{2\vec{P}_m}{r^3} \quad (7)$$

Сила взаимодействия диполей

$$F = (\vec{P}_m, \frac{\partial \vec{B}}{\partial r}) = -\frac{6P_m^2}{r^4} \quad (8)$$

Диполи притягиваются, если их моменты сонаправлены, и отталкиваются, если их моменты направлены противоположно.

В эксперименте используются шарообразные неодимовые магниты. Магнитное поле равномерно поляризованного шара эквивалентно магнитному полю точечного диполя с тем же магнитным моментом, расположенного в центре этого шара.

C. Сила сцепления цепочки магнитов и крайнего магнита в ней

В ходе работы будет проведен эксперимент по измерению силы сцепления магнитов в цепочке. Выразим эту силу через магнитный момент шара P_m и расстояние между центрами соседних шаров d .

$$\begin{aligned} F &= \frac{6P_m^2}{d^4} + \frac{6P_m^2}{(2d)^4} + \dots = \\ &= F_0(1 + 1/2^4 + 1/3^4 + \dots) \approx 1,08F_0 \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь F_0 - сила сцепления между двумя магнитами в отсутствие других.

D. Частота малых колебаний горизонтальной цепочки магнитов в магнитном поле

Кроме того, в работе присутствует эксперимент по измерению частоты малых колебаний подвешенной горизонтально на нитке цепочки из неодимовых магнитов в магнитном поле Земли. Момент инерции такой

цепочки из n магнитных шариков находится по теореме Гюйгенса-Штейнера следующим образом:

$$I_n = n \cdot \frac{2}{5} mr^2 + 2mr^2 \cdot (2^2 + 4^2 + \dots + (n-1)^2) = mr^2 \left(\frac{2}{5} n + 2(2^2 + 4^2 + \dots + (n-1)^2) \right) \quad (10)$$

при нечетном n и

$$I_n = n \cdot \frac{2}{5} mr^2 + 2mr^2 \cdot (1^2 + 3^2 + \dots + (n-1)^2) = mr^2 \left(\frac{2}{5} n + 2(1^2 + 3^2 + \dots + (n-1)^2) \right) \quad (11)$$

при четном n . Обозначим коэффициент при I_n за α_n .

Если считать цепочку однородным тонким стержнем, то момент инерции цепочки длины n будет оцениваться, как

$$I_n \approx \frac{1}{12} (nm)(2nr)^2 = \frac{1}{3} n^3 mr^2 \quad (12)$$

Обозначим $\beta_n = \frac{1}{3} n^3$. Посчитаем коэффициенты α_n и β_n для n от 1 до 12 (табл. I).

Таблица I
Коэффициенты α_n и β_n

n	α_n	β_n
1	0,4	0,3
2	2,8	2,7
3	9,2	9
4	21,6	21,3
5	42	41,7
6	72,4	72
7	114,8	114,3
8	171,2	170,7
9	243,6	243
10	334	333,3
11	444,4	443,7
12	576,8	576

Из таблицы видно, что при $n \geq 3$ коэффициенты α_n и β_n отличаются не более, чем на 2%. Это значительно меньше экспериментальных погрешностей, поэтому целесообразнее использовать формулу 12.

Теперь можно записать уравнение вращательного движения. Пусть цепочка отклонилась от положения равновесия на малый угол α . По формуле 6,

$$\beta_n mr^2 \frac{d^2 \alpha}{dt^2} = -nP_m B_H \alpha \quad (13)$$

$$1/3n^3 mr^2 \frac{d^2 \alpha}{dt^2} + nP_m B_H \alpha = 0 \quad (14)$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{1}{3} \frac{n^2 mr^2}{P_m B_H}} = kn \quad (15)$$

Е. Формулы, использовавшиеся для обработки линейных зависимостей

Для линейной зависимости $y = kx$ коэффициент наклона и его среднеквадратичная ошибка находятся по следующим формулам:

$$k = \frac{\sum x_i y_i}{\sum x_i^2}$$

$$S_k = \sqrt{\frac{1}{n-1} \cdot \frac{\sum (y_i - kx_i)^2}{\sum x_i^2}}$$

Для нахождения полной ошибки следует умножить S_k на коэффициент Стьюдента. При доверительной вероятности в 95% и $n = 4$ коэффициент равен 3,18, для $n = 10 - 2,26$.

III. Определение радиуса и массы магнитов

Измерим массу и радиус магнитов. Для нахождения средней массы магнитов просто взвесим все магниты (их $N = 28$) на электронных весах. Для нахождения разброса массы взвесим несколько магнитов поодиночке.

Таблица II
Результаты измерений средней массы магнитов

Масса N магнитов	$M = 23,912$ г
Масса одного магнита	$m = \frac{M}{N} = 0,854$ г

Таблица III
Результаты измерений массы одиночных магнитов

n	m , г
1	0,850
2	0,855
3	0,858
4	0,853
5	0,859
Δm	0,003

$$m = 0,854 \pm 0,003 \text{ г}$$

Измерим радиус нескольких магнитов микрометром и усредним результат.

Таблица IV
Результаты измерения радиуса магнитов

n	$2r$, см
1	0,599
2	0,597
3	0,597
4	0,599
$2r$	0,598
$\Delta 2r$	0,002

$$r = 0,299 \pm 0,001 \text{ см}$$

IV. Измерение дипольного момента магнитов

А. Первый метод

Измерим максимальное расстояние, на котором один магнит может удерживать второй в гравитационном поле. Для этого расположим магниты с двух сторон стола и будем подкладывать под верхний листы бумаги, пока нижний магнит не перестанет держаться (см. рис. 1).

Измерим штангенциркулем суммарную толщину d стола и листов бумаги.

$$d = 2,25 \pm 0,02 \text{ см}$$

Погрешность складывается из погрешности штангенциркуля и толщины одного листа бумаги $d_{\text{л}} = 0,01$ см. Равенство сил тяжести и притяжения:

$$mg = 6 \frac{P_m^2}{(d+2r)^4}$$

$$P_m^{(1)} = \sqrt{\frac{mg(d+2r)^4}{6}} = 95,8 \pm 1,5 \text{ Гс} \cdot \text{м}^3 \quad (16)$$

Погрешность считается следующим образом:

$$\varepsilon_{P_m^{(1)}} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\varepsilon_m\right)^2 + (2\varepsilon_{d+2r})^2} = 0,016$$

Намагниченность материала шариков находится по формуле

$$p_m^{(1)} = \frac{P_m}{V} = \frac{3}{4\pi} \frac{P_m}{r^3} = 855 \pm 16 \text{ Гс} \quad (17)$$

$$\varepsilon_{p_m^{(1)}} = \sqrt{(\varepsilon_{P_m^{(1)}})^2 + (3\varepsilon_r)^2} = 0,019$$

Найдем величину индукции магнитного поля на полюсе шарика.

$$B_p^{(1)} = \frac{2P_m}{r^3} = 7100 \pm 130 \text{ Гс} \quad (18)$$

$$\varepsilon_{B_p^{(1)}} = \sqrt{(\varepsilon_{P_m^{(1)}})^2 + (3\varepsilon_r)^2} = 0,019$$

При измерении магнетометром получилось значение индукции поля на полюсе

$$B = 0,520 \text{ Тл} = 5200 \text{ Гс} \quad (19)$$

Остаточная магнитная индукция материала шарика

$$B_r^{(1)} = 4\pi p_m = 10,74 \pm 0,20 \text{ кГс}$$

Табличное значение остаточной магнитной индукции соединения неодим-железо-бор варьируется в районе 10-14 кГс. Этот интервал включает в себя полученный результат.

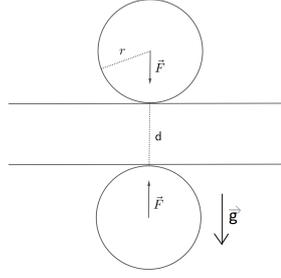


Рис. 1.

В. Второй метод

Для второго метода измерим максимальную массу магнитной цепочки, которую способен удержать верхний магнит (см. рис. 2). Соединим большое количество магнитов в цепочку и подвесим снизу на более мощный магнит платформу для грузиков. Будем повышать массу висящей конструкции, пока она не начнет отпадать. Измерим критическую массу цепи с грузами, висящими на ней.

$$m_{max} = 521 \pm 2 \text{ г} \quad (20)$$

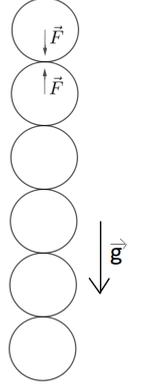


Рис. 2.

По формуле 9,

$$6P_m^2/(2r)^4 = F_0 = \frac{F}{1,08} = 473000 \pm 2000 \text{ дин} \quad (21)$$

$$P_m^{(2)} = \sqrt{\frac{F_0(2r)^4}{6}} = 100,4 \pm 0,7 \text{ Гс} \cdot \text{м}^3 \quad (22)$$

$$\varepsilon_{P_m^{(2)}} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\varepsilon_F\right)^2 + (2\varepsilon_r)^2} = 7 \cdot 10^{-3}$$

Намагниченность равна

$$p_m^{(2)} = \frac{P_m^{(2)}}{V} = 896 \pm 11 \text{ Гс} \quad (23)$$

$$\varepsilon_{p_m^{(2)}} = \sqrt{(\varepsilon_{P_m^{(2)}})^2 + (3\varepsilon_r)^2} = 0,012$$

Индукция магнитного поля на полюсе:

$$B_p^{(2)} = 7510 \pm 90 \text{ Гс} \quad (24)$$

V. Итоги измерения дипольного момента магнитов

Оба метода измерения дипольного момента дают весьма близкие результаты попадающие в ожидаемый диапазон значений. Второй метод оказался более точным. С другой стороны, поле, измеренное магнетометром, имеет только верный порядок величины. Скорее всего, такая погрешность вызвана очень большим градиентом поля на полюсе. Таким образом, по имеющимся данным выбрать лучший метод измерения невозможно. Далее будем использовать усредненное значение магнитного момента

$$P_m = \frac{P_m^{(1)} + P_m^{(2)}}{2} = 98,1 \pm 2 \text{ Гс} \cdot \text{м}^3$$

VI. Измерение горизонтальной составляющей магнитного поля Земли

Для измерения горизонтальной составляющей магнитного поля соберем установку в виде цепочки из n шаров, горизонтально подвешенной на бифилярном подвесе из нити (см. рис. 3). Будем изучать колебания системы в магнитном поле Земли. В начале подвесим цепочку, свернутую в кольцо для оценки влияния упругости нити. Для $n = 12$ шаров период колебаний кольца равен

$$T_c \approx 50 \text{ сек} \quad (25) \quad \text{Рис. 3.}$$

$$T_c = 2\pi \sqrt{\frac{n^3 m r^2}{3k_t}} \quad (26)$$

Здесь k_t - коэффициент кручения нити.

$$k_t = \frac{n^3 m r^2}{3 \left(\frac{T_c}{2\pi}\right)^2} \approx 0,694 \text{ дин} \cdot \text{см} \quad (27)$$

На поверхности Земли величина индукции магнитного поля равна по порядку величины 0,5 Гс. Коэффициент k для магнитного поля, действующего на один магнит

$$k_m = B_H P_m \approx 50 \text{ дин} \cdot \text{см} \quad (28)$$

Видим, что $k_m \gg k_t$. Следовательно, кручением нити можно пренебречь.

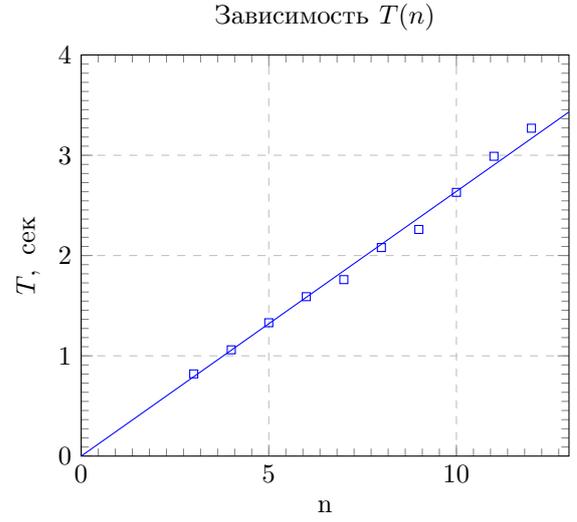
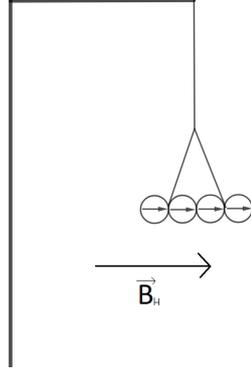
Измерим период малых колебаний цепочки магнитов в зависимости от количества магнитов в ней. Будем мерять секундомером по 10 периодов для большей точности. Результаты измерений приведены в табл. V. Погрешность измерения T равна $\Delta T = 0,2/10 = 0,02$ сек

Таблица V
Результаты измерения $T(n)$

n	$10T$, сек	T , сек
3	8,20	0,82
4	10,55	1,06
5	13,3	1,33
6	15,9	1,59
7	17,6	1,76
8	20,8	2,08
9	22,6	2,26
10	26,3	2,63
11	29,9	2,99
12	32,7	3,27

Приведенная зависимость линейна. Найдем угловой коэффициент методом наименьших квадратов.

$$k = 0,264 \pm 0,006 \text{ сек} = 2\pi \sqrt{\frac{1}{3} \frac{m r^2}{P_m B_H}}$$



$$B_H = \frac{m r^2}{3 P_m \left(\frac{k}{2\pi}\right)^2} = 0,147 \pm 0,007 \text{ Гс} \quad (29)$$

$$\varepsilon_{B_H} = \sqrt{\varepsilon_m^2 + (2\varepsilon_r)^2 + \varepsilon_{P_m}^2 + (2\varepsilon_k)^2} = 0,05$$

VII. Измерение вертикальной составляющей магнитного поля Земли

Для определения вертикальной составляющей измерим момент сил M , действующих со стороны магнитного поля на стрелку в горизонтальном положении. Для этого подвесим цепочку из четного количества шаров за центр на нити. Будем вешать проволоку так, чтобы момент силы тяжести проволоки уравновешивал момент силы магнитного поля.

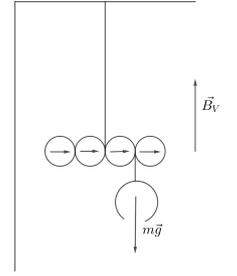


Рис. 4.

Проведем измерения с цепочками из 4, 6, 8 и 10 шаров. Будем измерять массу проволоки m и расстояние от точки подвеса проволоки до точки подвеса цепочки l . Результаты измерений приведены в табл. VI.

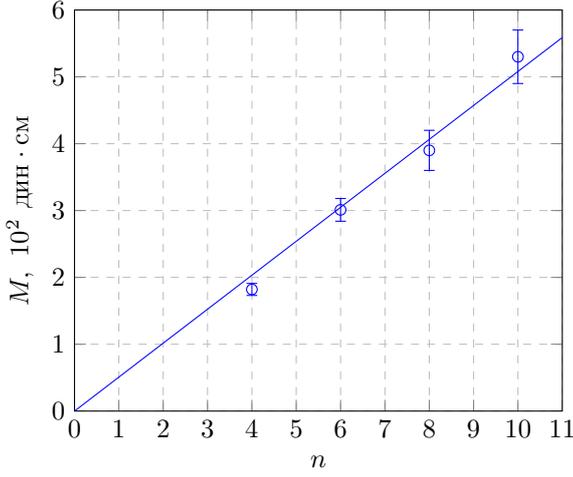
Таблица VI
Зависимость момента силы тяжести от числа шариков

n	m , г	l , см	M , 10^2 дин · см
4	$0,310 \pm 0,015$	0,598	$1,82 \pm 0,090$
6	$0,257 \pm 0,015$	1,196	$3,01 \pm 0,0170$
8	$0,224 \pm 0,015$	1,794	$3,90 \pm 0,300$
10	$0,225 \pm 0,015$	2,392	$5,30 \pm 0,400$

Из графика этой зависимости видно, что она линейна. Можно сделать вывод, что дипольный момент шариков векторно аддитивен.

Из МНК найдем коэффициент углового наклона графика.

$$k' = 51 \pm 4 \text{ дин} \cdot \text{см} \quad (30)$$

Зависимость $M(n)$ 

$$k' = B_V P_m$$

Отсюда вертикальная составляющая магнитного поля равна

$$B_V = \frac{k'}{P_m} = 0,52 \pm 0,04 \text{ Гс}$$

$$\varepsilon_{B_V} = \sqrt{\varepsilon_{k'}^2 + \varepsilon_{P_m}^2} = 0,08$$

VIII. Анализ результатов

Полное значение индукции магнитного поля равно

$$B = \sqrt{B_V^2 + B_H^2} = 0,54 \pm 0,08 \text{ Гс}$$

$$\delta_B = \sqrt{\frac{(B_H \delta_{B_H})^2 + (B_V \delta_{B_V})^2}{B_H^2 + B_V^2}} = 0,08 \text{ Гс}$$

Тангенс угла магнитного наклона равен

$$(\text{tg}(\beta_m))_{\text{эксп}} = \frac{B_V}{B_H} = 3,5 \pm 0,9$$

$$(\beta_m)_{\text{эксп}} = 74^\circ \pm 4^\circ$$

Угол между осью диполя и направлением на Долгопрудный равен

$$\alpha_{\text{эксп}} = 90^\circ - \arctan\left(\frac{B_V}{2B_H}\right) = 29^\circ \pm 4^\circ$$

Долгопрудный находится на широте $\theta = 55,9495^\circ$ и долготе $\phi = 37,50183^\circ$. Если считать магнитное поле Земли эквивалентным полю точечного диполя, расположенного в центре и направленного строго от северного к южному географическому полюсу, получим значение для β_m

$$(\text{tg}(\beta_m))_{\text{теор}} = \frac{2 \sin \theta}{\cos \theta} = 2,960$$

$$(\beta_m)_{\text{теор}} = 71.33^\circ$$

Этот результат не очень точен. Северный магнитный полюс Земли имеет координаты $\theta_m = 86.471^\circ$ северной широты и $\phi_m = 181.245^\circ$ западной долготы по состоянию на 2018 год. Угол между направлением

на северный магнитный полюс и направлением на Долгопрудный находится по формуле

$$\alpha = \cos^{-1}(\sin \theta \sin \theta_m + \cos \theta \cos \theta_m \cos(\phi_m - \phi)) = 36,9^\circ \quad (31)$$

Точное значение магнитного наклона равно

$$(\beta_m)'_{\text{теор}} = 2,67$$

Видно, что результат, полученный экспериментально, плохо сходится с таблицей.

Оценим также полный магнитный дипольный момент Земли.

$$B = \frac{P_m}{R_3^3} \sqrt{1 + 3 \cos^2 \alpha_{\text{эксп}}}$$

$$(P_m)_{\text{эксп}} = \frac{B R_3^3}{\sqrt{1 + 3 \cos^2 \alpha_{\text{эксп}}}} = (7,7 \pm 0,9) \cdot 10^{25} \text{ Гс} \cdot \text{см}^3$$

Табличное значение магнитного дипольного момента Земли составляет $(P_m)_{\text{табл}} = 7,72 \cdot 10^{25} \text{ Гс} \cdot \text{см}^3$, что очень близко к измеренному значению.

IX. Вывод

Индукцию магнитного поля можно измерить с помощью простого оборудования с достаточно высокой точностью. В результате эксперимента получился очень хороший результат для магнитного дипольного момента Земли, но положение Долгопрудного относительно табличного магнитного полюса сильно расходится с теоретическим. Можно сделать вывод, что приближение магнитного поля Земли полем точечного диполя является очень грубым.

